研究叢書 32

期待効用理論

―批判的検討―

伊藤駒之 著

神戸大学
経済経営研究所
1986

期 待 効 用 理 論

―批判的検討―

伊　藤　駒　之　著

神戸大学経済経営研究所

1986

は し が き

リスク的状況にある意思決定者が数学的期待値を最大にすることは必ずしも良い方針ではないこと，これを示す有名な例は聖ペテルスブルグのパラドックスであろう。このパラドックスは1枚の硬貨を表がでるまで投げつづけ，n回目に始めて表がでれば，意思決定者が2^n万円を受けとることで終るゲームである。このゲームの期待値は無限大となる（すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n 2^n=\infty$）。しかしながら，数学的期待値が無限大であるこのゲームをするために100万円を支払うような意思決定者はほとんどいないだろう。

このパラドックスを解決するために，D. Bernulli（1738）は数学的期待値よりもむしろ"moral expectation（すなわち，効用)"を最大化すべきであるということを指摘した。そして，聖ペテルスブルグのパラドックスの時代からほぼ200年という長い時間が経過した後に，合理的意思決定の本質（？）を具体化するものとしてVon Neumann-Morgenstern（1947）の期待効用定理が現れた。その後，この期待効用定理を前提としたリスク回避理論（Arrow, 1963, 1970, Pratt, 1964)が展開された。現在にいたるまで，期待効用定理とリスク回避理論はリスクのもとにおける意思決定問題を研究する人々の主要な道具となっている。本書では，期待効用定理とリスク回避理論を合わせたものを期待効用理論と呼び，この期待効用理論の論理的構造をリスク的初期条件の視点から検討することが主題となっている。

期待効用理論の論理的構造に対する著者の関心は，ある効用関数の存在を仮定するとリスク的初期条件のもとでは意外な結果が生じる例を福場 庸教授(大阪大学）が示されたときに，始まった。最初は，期待効用定理の明晰性のために，この例はなにか論理的に誤った手順を踏んでいるのではないかという疑念があった。そして，期待効用定理とリスク回避理論の文献を何回となく読んで，

福場先生に抵抗したものだった。とくに，期待効用定理には初期条件が明記されておらず，リスク回避理論には確実的な初期条件（あるいは初期資産）が含まれていること，これらのことについての解釈が著者にとって悩ましいことであった。しかしながら，例そのものは単純明解であり，疑問をさしはさむ余地はほとんどなかった。期待効用理論に対する著者の盲目的な信頼は崩れていった。

期待効用理論に対する評価，解釈，見解などにおいて福場教授と著者の間には相違はあろうが，同教授との討論が本書の成立に大きく貢献している。このように，本書における研究の動機，具体的題材，構成などに関して福場教授に負うところ甚だ大である。ここに同教授に対し厚く御礼申し上げる。

本書がこのような形で刊行されるにあたっては，歴代所長をはじめとして研究所の諸先生方，米花　稔先生（福山大学）および恩師横山・保先生（高岡短大）から温い励ましと御指導を賜った。また，本書の原稿の段階で，福場　庸，田畑吉雄（大阪大学）の両先生から多くの助言，示唆を頂いた。改めて両先生に対し深謝の意を表する。

なお，本書の装丁，校正などに注意深い配慮を下さったことに対し，研究所研究助成掛の諸氏に感謝の意を表したい。

昭和61年8月　六甲台にて

伊　藤　駒　之

目　　次

目　　次

目　次

第1章　目的と概要

1. 目　的

> *"A scientific theory must be tentative and always subject to revision or abandonment in light of facts that are inconsistent with, or falsify, the theory. A theory that is by its own terms dogmatic, absolutist and never subject to revision is not a scientific theory"*
>
> — *William Overton* (1983) —

期待効用に関する本格的な議論はJohn Von Neumann — Oskar Morgenstern の書物，Theory of Games and Economic Behavior，第二版が1947年に出版された時から始まったと言っても過言ではないだろう。その後，期待効用の規範性を確信する人々は，期待用定理からリスク回避理論へと研究を進めた（Arrow, 1963, 1970, Pratt, 1964)。本書では，期待効用定理とリスク回避理論を一体として**期待効用理論**と呼ぼう。すなわち，

期待効用理論＝期待効用定理＋リスク回避理論

としよう。本書の目的はこの期待効用理論を批判的視点から検討することである。

記念すべき1947年以来，ほぼ40年近くの年月が経過している。その間，期待効用に関する幾多の賛否両論が登場して来た。それにもかかわらず，期待効用に対して決定的な結論は打ち出されていないようにみえる。期待効用に対する批判には主として記述的な（descriptive）有効性に向けられたものが多く，規範的な（normative）それは，一，二の例外を除いてほとんどない。例えば，Machina（1982，a） の反例などはその例外として挙げられうる。

規範（あるいは prescription）としての**期待効用の目的**として Fishburn（1968, p. 339）は一応つぎの 3 つを掲げる；

1. 期待効用は意思決定者が従うべき常識的（または合理的）指針である。
2. 期待効用は意思決定者が複雑な選好対象に選好順位をつけるのに役立つことを狙いとしている。
3. 期待効用は意思決定者の選好を数値的構造に変換し，最適化問題のアルゴリズムにおいて使用される。

規範に限定されたとしても，これらの目的を達成しているかどうかによって期待効用を評価しようとすることは錯綜した困難な問題である。

本来，期待効用概念の目的はリスク的選択対象に対する意思決定者の効用を測定することであった（Ramsey, 1931, Von Neumann－Morgenstern, 1947)。期待効用がしばしば**可測効用**（measurable utility）と呼ばれる所以はこれである。効用の測定には意思決定者の選好に関する情報とその情報を効用に変換するためのプロセスが必要とされる。測定（または変換）のプロセスは適切な情報と認められるものを期待効用の公理系と一貫している（効用と呼ばれる）数値に変換する。

効用が，充分，あるいは，ある程度，正確に測定されるとき，２つの応用の途がある。すなわち，指針（規範）のために効用を利用する途と予測（記述）のために効用を利用する途がある。経験的な事実は期待効用の最大化原則に必ずしも一致しないと言われている（Schoemaker, 1980)。記述のために効用を利用することは多くの危険をともなう。多分，その結果であろうと推定されるが，最近の期待効用論者の多くは期待効用の記述的能力よりも規範における利点を強調している。しかしながら，意思決定者の選好に関する情報は意思決定者の行動に関する情報に基づいている。したがって，その情報は記述的性格を免れることができない。そのとき効用を規範のために使用する途は平坦ではないだろう。

また，現実の意思決定者はある状況のもとで選好行動をなす。例えば，企業はある経済状勢の中で，金額資産を有し，また工場，事務所などの有形資産ならびにマーケット・シェア，商権などの無形資産を含む非金額的資産も有する。これらの資産の運用によって企業の経営活動がおこなわれる。その企業の経営者をとりかこむ状況はこれらの要因に加えて企業内における人間関係や家庭など等々を含むと考えられる。このような状況は企業の経営者が選好行動をなすときの**初期条件**と言われうる。一般的には初期条件が意思決定者の選好に影響すると考えることは不自然でないだろう。

比較的狭い範囲に限定した初期条件の例を考えよう。ある企業は“**当面の経営活動**”から，景気が良ければ4億円の利益を計上し，景気が悪ければ1億円の利益を計上することができるとしよう。そして良い景気が期待される確率は½であるとしよう。そして，この企業ではある投資計画が提案されている。その投資は，景気が良ければ1億円の利益を計上することができ，景気が悪ければ7千万円の損失を招く。この投資計画案すなわち選択対象を採用すべきかどうかということに経営者が迫られているとき，“**当面の経営活動**”は経営者の初期条件と言われうる。この場合，初期条件はリスク的となる。

このリスク的初期条件が意思決定問題の考察範囲に含まれているとき，期待効用理論にはいくつかの疑問が生じる。期待効用定理では，意思決定者が選択対象の集合に対して期待効用の公理系に従うような選好を示すならば，彼の選好を表現する効用関数の存在が保証されている。

したがって，期待効用定理には初期条件に特別な考慮は払われていない。一方，リスク回避理論には初期条件が組みこまれている。そのとき，期待効用の概念がリスク的初期条件を排除している理由はないようにみえる。事実，リスク的初期条件におけるリスク回避の議論がなされている（Ross, 1981, Kihlstrom－Romer－Williams, 1981，本書，第3章4－4節)。それにもかかわらず，期待効用の概念がリスク的初期条件を組みこんでいるかどうかという点に明瞭

性の問題がある。

意思決定者がリスク回避的であり，リスク的初期条件を有しているとき，期待効用定理の定式化による期待効用，すなわち，初期条件を組みこまない期待効用は初期条件を組みこんだ期待効用と同じ選好順位を選択対象に与えるであろうか。すなわち，期待効用理論の内的一貫性に問題が生じないだろうか。期待効用にリスク的初期条件が組みこまれていると仮定しよう。そのとき，期待効用の定義そのものはなにを指しているのか，すなわち期待効用定理が導出される証明の過程はリスク的初期条件が組みこまれたときの期待効用の妥当性に疑問を生じさせないものなのか。

さらに，リスク的初期条件のもとでは期待効用を測定することには論理的困難は存在しないのか。すなわち，効用の可測に関する検証性に問題はないだろうか。これらの問題点は期待効用の応用性に制約を加えることにならないだろうか。

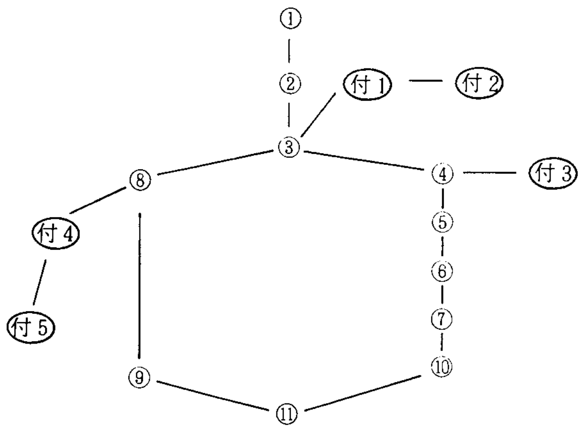
このような疑問に答えることが本書の狙いである。もちろん，本書の第7章で議論するように，意思決定問題においては初期条件がリスク的(または不確実)であるかどうかは意思決定者の認識に関連する。しかしながら，初期条件が意思決定者の選好に影響するという視点から言えば，“**重要な**”意思決定問題では初期条件のリスク性（または不確実性）は不可避であるようにみえる。この問題提起により期待効用理論が一層深く理解されると我々は信じている。そして本書の分析から生じる結論では，もし初期条件のリスク性(または不確実性)が容認されるならば，期待効用理論には，規範的にも，記述的にも難点が存在するということである。

2. 概　要

本書は本文と付録から成立しており，図1－1で示されているような構成となっている。○内の文字は各章または各付録を示す。例えば，③は第3章で，

(付1) は付録1であることを指す。また，本書では数学的な証明に関連する議論をできるだけ付録に含めるようにした。

図 1 － 1



②から③までは期待効用理論の基礎的解説である。

③から⑨へ至る途は期待効用の公理系の展望（survey）に相当する。

③から⑩へ到る途は期待効用理論に対する批判である。

⑪は10章までの分析結果からの結論である。

以下では各章と付録の内容を簡単に述べておこう。

第2章「基本概念と定義」：期待効用の議論で使用される基本概念とそれらに関連する用語の定義が述べられる。

第3章「期待効用理論」：期待効用理論の批判的検討をなすための前提として期待効用理論がどのようなものであるかを示す。

第4章「期待効用理論の妥当性」：本書の主眼たる「リスク的初期条件」の視点から期待効用理論の問題点を議論する。この章の議論は期待効用理論

に対する我々の批判の核である。

第5章「期待効用と初期条件についての再考」：期待効用では初期条件がどのような位置を占めているかを議論し，期待効用理論が適用される，現実の重要な決定問題においては，初期条件が確実でないことを例証する。

第6章「効用の測定」：効用の測定可能性と効用の測定方法に関する問題を議論する。これが解決されることなしには，期待効用理論は記述的にも，規範的にも無用の長物と化す。リスク的初期条件のもとでは，効用の測定には論理的困難が存在することを指摘する。

第7章「小世界と制約された合理性」：決定に関連する全ての事項と全ての可能性を考慮に入れることは不可能である。そしてそのような理想に近づく努力も制約されている。それゆえに，決定問題がある限定された範囲内で取扱われなければ，期待効用は現実の決定問題において有効でないだろう。この範囲限定の問題は意思決定と深くかかわりあっていることを指摘する。

第8章「期待効用の諸公理系」：リスク的初期条件の視点からの批判に耐えうるような公理系が存在しないことを示すために，期待効用の典型的な公理系をいくつか挙げ，それらに注釈を加える。

第9章「公理系の評価」：期待効用の公理系に望まれる一般的性質を考察し，公理系に対する批判的注釈をおこなう。

第10章「パラドックス」：期待効用に対する反論は数多く存在するが，本章では初期条件に関係すると考えられているAllaisのパラドックスとFukubaのパラドックスならびにそれらに関連する議論を紹介する。

第11章「総括」：本書で議論された期待効用理論に対する分析の結果が要約される。

付録1「効用関数の導出」：第3章2節で掲げた期待効用定理が証明される。ここでの証明は他の文献におけるそれと本質においては同じであるが，

本書の議論，とくに第4，5，6，7章の内容を深く理解する上で，証明のプロセスをたどることは有意義である。

付録2「定理3．2の証明」：リスク回避に関するPratt（1964）の定理1の主要部分である定理3．2が証明される。

付録3「定理4．2の証明」：第4章は期待効用理論に対する我々の批判の核であると述べたが，この核の核とも言うべき，議論の重要部分を占めている定理4．2が証明される。

付録4「諸公理系の同値性」：第8章で掲げた諸公理系の同値性を示す。これによって期待効用の諸公理は同工異曲であることが判明する。

付録5「効用関数の連続性と微分可能性」：連続かつ微分可能な効用関数は数多くの応用において使われているが，これの存在に関する文献としては若干のものが見受けられるにすぎない。ここでは期待効用の公理系が与える位相を使って連続かつ微分可能な効用関数の存在を証明しよう。

第２章　基本概念と定義

1. はじめに

この章は，期待効用の理論で使われる主要な基本概念と用語に対する解説である。

期待効用はリスク的状況での意思決定問題の解決を狙いとしている。リスクなる用語は，日常会話でも，学術文献でもしばしば使われているが，それが指しているところは一意的でない。したがって，本書の議論においてもリスクなる言葉の意味を明確にしておく必要があると考えられる。２節では，確実性，リスク，不確実性の概念を定義しておこう。

３節では，“くじ”と確率ベクトルならびに単純確率分布の関係を説明し，これらが混合集合として特徴づけられることを指摘しよう。諸公理系の展望に関する第８章と付録を除いて我々は“くじ”を分析道具とする。そして本章の５節では混合集合の上で定義された線型効用が期待効用に拡張される。

４節では，いくつかの二項関係の性質を定義し，それらの定義に基づいて弱順序，全順序，半順序を説明しよう。期待効用の議論では弱順序の概念が大きいウエイトを占めている。全順序，半順序との比較において弱順序の意味がより容易に理解されると期待される。

３節と４節に含まれる“くじ”，確実な結果の集合，混合集合，弱順序は期待効用で使われる根本概念（primitive concept）とみなされうる。

５節では，まず線型効用と期待効用の相違を指摘しよう。この相違は期待効用を導出するときに生じる証明の技術的問題であると，普通，考えられている。しかしながら，第４章と第７章で議論されるように，期待効用の論理的性格を不明瞭にする要素である。つぎに、期待効用概念に付随して生まれてきた確実

等価額とリスク・プレミアムを初期条件の考慮なしに説明しよう。これらは本書で頻ぱんに使われる概念である。

期待効用に対する解釈は，しばしば，規範的解釈と記述的解釈の2つの視点から分類されている。6節では期待効用に即して規範的解釈と記述的解釈を説明しよう。また期待効用では規範的解釈を記述的解釈から分離しえないという問題点が指摘される。

2. 確実性・リスク・不確実性

問題が設定されている状況に応じて，意思決定問題は確実性（certainty)，リスク（risk)，不確実性（uncertainty）なる3つの基本概念によって，しばしば，分類されている。個々の研究分野における問題がこれらの基本概念によって必ずしも記述されているわけではない。オペレーションズ・リサーチ，経営科学（Management Science)，経済学などでは，決定論的（deterministic）モデルと確率論的（stochastic）モデルなる用語もしばしば用いられている。

(1) **確実性**. 確実性とは，将来の事象において，ある結果だけが生じ，他の結果が生じる可能性は全くないことを示す性質である。

(2) **リスク**. リスクとは，将来の事象において，結果はランダム，すなわち，チャンスに依存するが，各々の結果に対応する確率分布が既知であることを示す性質である。

(3) **不確実性**. 不確実性とは，将来の事象において，結果はチャンスに依存するが，各々の結果に対応する確率分布が未知である（パラメター不明の場合を含む）ことを示す性質である。

ただし，この分類方式にはつぎのような主張がある；K. Borch（1968, a）によれば「リスクと不確実性を2つの異なる，充分に定義された概念として初めて使用した人は Frank. H. Knight であった。1921年に刊行された彼の書物 " Risk, Uncertainty and Profit " は経済学において不確実性の要素を体系的

に研究する途を切開いた。そして，Knight の用語法は多くの経済学者によって広く受け入れられてきた。しかしながら，リスクと不確実性を区別することは，もはや，有益でないようにみえる。」

この主張に対する Borch の正当化は詳細でもなく，また，明確でもないが，暗黙的に主観確率を念頭において，一応，つぎのように述べられている。

「不確実性とリスクが存在することは一つの行動の結果が確実に予測されえないことを意味する。そのような状況において，全ての可能な結果の集合を指定できるものとし，さらに，このような状況を分析しようとするならば，結果についての生起の可能性に関する仮定が導入される必要ありと考えられる。しかしながら，これは可能な結果の集合上で確率測度 — あるいは，それの等価物 — が定義されることを意味している。ひとたび，このステップが不可欠，あるいは，有用なものとして受け入れられるなら，リスクと不確実性の区別を要求しないような理論を展開することもできよう。このことは確率なる概念に関する哲学的な問題が解決されたということを意味するものではない。」

このように，リスクと不確実性の区別が無意味であるという見解もあるが，リスクと不確実性を明確に区別しておくことは問題が設定されている状況を明確にするので，本書における議論では，確実性，リスク，不確実性を使いわけることにしよう。

この Borch 的発想から，リスクと不確実性の区別を意識的に避けているのかどうか不明であるが，一部の文献では不確実性がリスクを指しているケースもあり，また，日常会話におけるような大ざっぱな使用がリスクと不確実性についてなされていることもある。本書でも，用語の煩雑さを避けるために，リスクと不確実性を併せて不確実性と呼ぶことがある。ただし，そのような時には，必ず一言，その旨を示すことにしよう。

3. “くじ”と混合集合

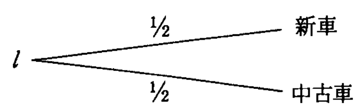
3－1 “くじ”

いま，硬貨が投げられたとき，表がでる確率と裏がでる確率はそれぞれ$\frac{1}{2}$としよう。さらに表がでたときにある結果，例えば新車が得られ，裏がでたときにある結果，例えば中古車が得られるとしよう。そのとき，硬貨が投げられ，事象の生起に依存して結果が得られるプロセスは“**くじ**（lottery)”と呼ばれている。

さらに，事象，表の確率は$\frac{1}{2}$であると言われ，ある結果，新車の確率は$\frac{1}{2}$とも言われている。もし我々が事象の生起ではなく，結果の生起だけに関心をもつならば，結果の確率だけについて言うことが許される。“くじ”においては，しばしば，事象を無視して，結果の確率だけに焦点が当てられている。

そのとき，“くじ”lは図２－１のような木（tree）で表現される。

図　2 － 1



また，“くじ”lをつぎのように表現することもできよう；

$$l=(\frac{1}{2}\cdot\text{新車},\ \frac{1}{2}\cdot\text{中古車})$$

さて，有限個の結果x_1，x_2，…，x_rが，それぞれ，ある既知の確率p_1，p_2，…，p_rで起るものとしよう。ただし，

$$\sum_{i=1}^{r} p_i=1,\quad p_i\geq 0$$

とする。また，集合Xを

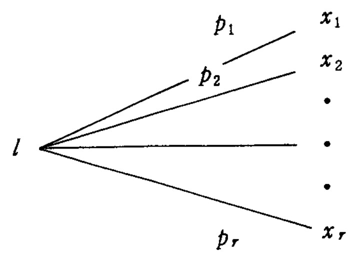
$$X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r\}$$

と定義しておこう。そのとき，これに対応する“くじ”lは

$$l = (p_1 \cdot x_1,\ p_2 \cdot x_2, \cdots,\ p_r \cdot x_r) \qquad (2.\ 1)$$

と表現することにする。

図　2 — 2



式（2．1）はx_iの確率がp_iであることを意味する。結果の集合$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$から作りうる，全ての"くじ"の集合を$\Omega$としよう；

$$\Omega = \{l \mid l = (p_1 \cdot x_1,\ p_2 \cdot x_2, \cdots,\ p_r \cdot x_r),$$
$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1,\ p_i \geq 0,\ x_i \in X,\ i = 1, 2, \cdots, r\}$$

ここで注意されたいことは，結果の数は有限個rであるが，"くじ"の集合Ωの要素の数は有限個でない。なぜならば，"くじ"の確率$p_1, p_2, \cdots, p_r$は

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

なる制約の範囲内で，閉区間［0, 1］内の全ての値をとることができる。

3－2　確率ベクトルと単純確率分布

"くじ"$l = (p_1 \cdot x_1,\ p_2 \cdot x_2, \cdots,\ p_r \cdot x_r)$は$x = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_r)$と$a = (p_1,\ p_2, \cdots,\ p_r)$によって表現されうるので，**確率ベクトル**(probability vector) $a = (p_1,\ p_2, \cdots,\ p_r)$は結果のベクトル$x = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_r)$の上で定義されていると言われる。そして集合$\Omega$に対応する，全ての確率ベクトルの集合を$R_p$としよう；

$$R_p = \{a \mid a = (p_1,\ p_2, \cdots,\ p_r),\ \sum_{i=1}^{r} p_i = 1,\ p_i \geq 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, r\}$$

例えば，“くじ” $l=(\frac{1}{6}$・大型車，$\frac{1}{2}$・中型車，$\frac{1}{3}$・小型車）は確率ベクトル$(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$と結果ベクトル（大型車，中型車，小型車）に分解される。明らかなように，確率ベクトル$(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$の第一要素$\frac{1}{6}$は大型車が“くじ” l によって得られる確率を示し，第二要素$\frac{1}{2}$は中型車が得られる確率を示し，第三要素$\frac{1}{3}$は小型車が得られる確率を示している。このように，一つの“くじ”に対して一つの確率ベクトルが定義され，その逆も真である。

確率ベクトルは確率分布の特殊な表現の一つである。上記の“くじ”にそくして言うと，$b(x_i)=p_i$，$i=1, 2, \cdots, r$ となる関数 b が“くじ”に対応する確率分布である。

定義2.1．単純確率分布（simple probability distribution）b とは，結果の集合 X（必ずしも有限でない）において，つぎの条件(1)，(2)，(3)，(4)を満たすような実関数（real-valued function）である（Fishburn, 1970, p.105）；

条件(1)　全ての X_1（$\subset X$）に対して $b(X_1)\geq 0$

条件(2)　$b(X)=1$

条件(3)　$X_1, X_2 \subset X$ かつ $X_1 \cap X_2=\phi$ なるとき

$b(X_1 \cup X_2)=b(X_1)+b(X_2)$

条件(4)　ある有限集合 X_3（$\subset X$）に対して $b(X_3)=1$

集合 $X=${大型車，中型車，小型車}，$X_1=${大型車}，$X_2=${中型車}，$X_3=${小型車}としよう。さらに，$b(X_1)=\frac{1}{6}$，$b(X_2)=\frac{1}{2}$，$b(X_3)=\frac{1}{3}$ であるとしよう。そのとき，X の部分集合 $X_s=${大型車，中型車}では

$$X_s=X_1 \cup X_2$$

であり，X_1 と X_2 の共通集合 $X_1 \cap X_2$ は空となる。したがって，条件(3)より

$$\begin{aligned} b(X_s) &= b(X_1 \cup X_2) \\ &= b(X_1)+b(X_2) \\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

このように，もしXが有限集合であるならば，単純確率分布から得られる確率は確率ベクトルから容易に計算できるし，また，その逆も真である。

ここで，結果の集合Xにおける，全ての単純確率分布の集合をP_sと定義しよう；

$$P_s=\{b|b\ は条件(1),\ (2),\ (3),\ (4)を満たす関数である\}$$

3－3　混合集合

これまでの議論では，“くじ”の結果は確実な結果，例えば自動車であった。しかしながら，“くじ”の結果がまた“くじ”であると考えることも可能である。したがって，以下では“くじ”の結果が“くじ”であるような状況，すなわち，多段くじで考察を進めよう。そのとき，“くじ”の結果が確実な結果の集合Xの要素であるか，“くじ”の集合Ωの要素であるかを区別したいときには，集合Xの要素に“**確実な**”結果というように“確実な”という形容詞を付けることにする。

さて，結果ベクトル（大型車，中型車，小型車）に対応する“くじ”l_1，l_2，すなわち，

$$l_1=(\frac{1}{6}\cdot大型車,\frac{1}{2}\cdot中型車,\frac{1}{3}\cdot小型車),$$

$$l_2=(\frac{1}{8}\cdot大型車,\frac{1}{4}\cdot中型車,\frac{5}{8}\cdot小型車)$$

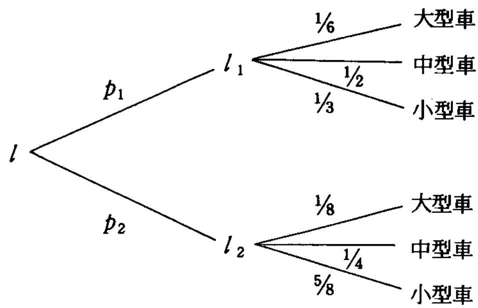
を考えよう。さらに，結果が“くじ”l_1，l_2であるような“くじ”l，すなわち，

$$l=(p_1\cdot l_1,\ p_2\cdot l_2),$$

$$p_1+p_2=1,\quad p_1,p_2\geq 0$$

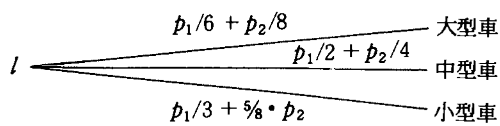
を考えよう。そのとき，lを図で表現すると，図2－3のようになる。

図　2 － 3



この“くじ” l は大型車，中型車，小型車が，それぞれ，ある確率で得られることを示している。そこで，大型車，中型車，小型車が得られる確率で“くじ” l を表現すると図2－4のようになる。

図　2 － 4



このように，“くじ” l の結果が“くじ”であるならば，“くじ” l も集合 Ω の要素となる。

いま，“くじ” l をつぎのように表現しよう；

$$
\begin{aligned}
l &= (p_1 \cdot l_1,\ p_2 \cdot l_2) \\
&= p_1 \cdot l_1 \dot{+} p_2 \cdot l_2
\end{aligned}
$$

そのとき，“くじ”の集合 Ω はつぎの定義2．2における混合集合となる。

定義 2．2．　混合集合とは，つぎの4つの条件を満たすような演算 $\dot{+}$，・が定義されている集合 F である（Herstein-Milnor, 1953）；

全ての $f_1, f_2 \in F$ と全ての $\alpha, \beta \in [0, 1]$ 対して

（ただし $[0, 1] = \{\alpha | 0 \leq \alpha \leq 1\}$ と定義される。）

条件M 1.

$$\alpha \cdot f_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot f_2 \in F$$

条件M 2.

$$\alpha \cdot f_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot f_2 = (1-\alpha) \cdot f_2 \dot{+} \alpha \cdot f_1$$

条件M 3.

$$\alpha \cdot (\beta \cdot f_1 \dot{+} (1-\beta) \cdot f_2) \dot{+} (1-\alpha) \cdot f_2$$
$$= (\alpha\beta) \cdot f_1 \dot{+} (1-\alpha\beta) \cdot f_2$$

条件M 4.　$\alpha = 0$ ならば，そのとき

$$\alpha \cdot f_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot f_2 = f_2$$

抽象演算 $\dot{+}$，・の定義は混合集合の定義２．２の中で与えられることになる。

註：混合集合の定義としては，つぎのような定義は数学的により明確であろう。混合集合とはつぎの四つの条件を満たす関数 g が存在する集合 F である（この註は静岡大学の市川朗氏の示唆による。）；

（１）$g: F \times F \times [1, 0] \rightarrow F$

（２）$g(f_1, f_2, \alpha) = g(f_2, f_1, 1-\alpha)$

（３）$g\{g(f_1, f_2, \beta), f_2, \alpha\} = g(f_1, f_2, \alpha\beta)$

（４）$g(f_1, f_2, 0) = f_2$

この定義によれば，g の表現としての“くじ”（$\alpha \cdot l_1, (1-\alpha) \cdot l_2$), l_1, $l_2 \in \Omega$, $\alpha \in [0, 1]$ も上の四つの条件を満たす。しかしながら，後の議論における見通しをよくするために，我々は g の表現として $\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2$ を使うことにする。

条件M 1，M 2，M 3，M 4 のもとで，つぎの M 5，M 6 が成立する（Fishburn, 1979）：

M 5.

$$\alpha \cdot f_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot f_1 = f_1 \qquad (2.\ 2)$$

M 6.

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot [\beta \cdot f_1 \dot{+} (1-\beta) \cdot f_2] \dot{+} (1-\alpha) \\ &\qquad \cdot [\gamma \cdot f_1 \dot{+} (1-\gamma) \cdot f_2] \\ &= [\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma] \cdot f_1 \\ &\quad \dot{+} [\alpha(1-\beta) + (1-\alpha)(1-\gamma)] \cdot f_2 \end{aligned} \qquad (2.\ 3)$$

M 5は以下のように導きだされる：

（M 4より）

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot f_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot f_1 \\ &\quad = \alpha \cdot [0 \cdot f_1 \dot{+} 1 \cdot f_1] \dot{+} (1-\alpha) \cdot f_1 \end{aligned}$$

（M 3とM 4より）

$$= 0 \cdot f_1 \dot{+} 1 \cdot f_1 = f_1$$

M 6は以下のように導きだされる：もし $\beta > \gamma$ であれば，M 2によって前後の項を置きかえることができるゆえに，一般性を失うことなしに $\gamma \geq \beta$ と仮定しておく。

（M 3より）

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot [\beta \cdot f_1 \dot{+} (1-\beta) \cdot f_2] \dot{+} (1-\alpha) \\ &\quad \cdot [\gamma \cdot f_1 \dot{+} (1-\gamma) \cdot f_2] \\ &\qquad = \alpha \cdot \{\beta/\gamma \cdot [\gamma \cdot f_1 \dot{+} (1-\gamma) \cdot f_2] \dot{+} (1-\beta/\gamma) \cdot f_2\} \\ &\qquad\qquad \dot{+} (1-\alpha) [\gamma \cdot f_1 \dot{+} (1-\gamma) \cdot f_2] \end{aligned}$$

（M 3より）

$$\begin{aligned} &= [1-\alpha(1-\beta/\gamma)] \cdot [\gamma \cdot f_1 \dot{+} (1-\gamma) \cdot f_2] \\ &\qquad \dot{+} \alpha (1-\beta/\gamma) \cdot f_2 \end{aligned}$$

（M 3より）

$$=[\alpha\beta+(1-\alpha)\gamma]\cdot f_1$$
$$\dot{+}[\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)(1-\gamma)]\cdot f_2$$

集合Ωが混合集合の条件を満たすことはつぎのように検証される。

全ての l_1, $l_2 \in \Omega$ と全ての $p_1 \in [0, 1]$ に対して

$$l=p_1\cdot l_1 \dot{+}(1-p_1)\cdot l_2 \in \Omega$$

なることはいま上で述べた。したがって，集合Ωは条件M 1を満たす。また

$$p_1\cdot l_1 \dot{+}(1-p_1)\cdot l_2=(1-p_1)\cdot l_2 \dot{+} p_1\cdot l_1$$

なることは“くじ”の性質から明らかである。したがって，集合Ωは条件M 2を満たす。

つぎに条件M 3の検証に移ろう。全ての l_1, $l_2 \in \Omega$ と全ての $p_2 \in [0, 1]$ に対して“くじ” $l_3=p_2\cdot l_1 \dot{+}(1-p_2)\cdot l_2$ を考えよう。そして，全ての $p_1 \in [0, 1]$ に対して結果が l_2, l_3 であるような“くじ” l_4，すなわち

$$l_4=p_1\cdot l_3 \dot{+}(1-p_1)\cdot l_2$$
$$=p_1\cdot[p_2\cdot l_1 \dot{+}(1-p_2)\cdot l_2]\dot{+}(1-p_1)\cdot l_2$$

を考えよう。この“くじ” l_4 では，“くじ” l_1 が起こる確率は $p_1 p_2$ であり，“くじ” l_2 が起こる確率は $p_1(1-p_2)+(1-p_1)=1-p_1 p_2$である。それゆえに，“くじ” l_4 は

$$l_4=(p_1 p_2)\cdot l_1 \dot{+}(1-p_1 p_2)\cdot l_2$$

となる。結論として

$$p_1\cdot[p_2\cdot l_1 \dot{+}(1-p_2)\cdot l_2]\dot{+}(1-p_1)\cdot l_2$$
$$=(p_1 p_2)\cdot l_1 \dot{+}(1-p_1 p_2)\cdot l_2$$

となり，集合Ωは条件M 3を満たす。また“くじ”の性質として条件M 4の成立は明らかである。

上述では“くじ”を表現するために演算$\dot{+}$，・が使われているが，定義2.2

における演算$\dot{+}$，・は抽象演算と考えられているゆえに，考察の対象となっている当該の集合によって演算$\dot{+}$，・は具体的意味において異なる。例えば，集合Fを実数の集合とし，演算$\dot{+}$，・が，それぞれ，実数の演算＋，×であるならば，実数の集合は明らかなように混合集合となる。また，集合Fがベクトル空間であり，演算$\dot{+}$，・が，それぞれ，ベクトルの和，スカラーとの積であるならば，ベクトル空間が混合集合であることも容易に検証されうる。

つぎに，結果が確率ベクトルであるような“くじ”の集合と結果が単純確率分布であるような“くじ”の集合は混合集合であることを示そう。

結果ベクトル，（大型車，中型車，小型車）に対応する確率ベクトル

$$a_1=\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right) \text{ と } a_2=\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{8}\right)$$

を考えよう。そして“くじ”の結果が確率ベクトルであるような“くじ”l'を

$$\begin{aligned} l' &= (p_1\cdot a_1,\ p_2\cdot a_2) \\ &= \left\{p_1\cdot\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right),\ p_2\cdot\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{8}\right)\right\} \end{aligned}$$

としよう。ただし$p_1+p_2=1$，$p_1, p_2\in[0,\ 1]$である。そして，また，l'を

$$l' = p_1\cdot a_1 \dot{+} p_2\cdot a_2$$

と表現しておこう。

この“くじ”l'において大型車が起こる確率は$p_1/6+p_2/8$であり，中型車が起こる確率は$p_1/2+p_2/4$であり，小型車が起こる確率は$p_1/3+5p_2/8$となる。したがって，結果が起こる確率で“くじ”l'を書き換えると

$$\begin{aligned} l' &= \left\{p_1\cdot\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right),\ p_2\cdot\left(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{8}\right)\right\} \\ &= \left(\frac{p_1}{6}+\frac{p_2}{8},\ \frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{4},\ \frac{p_1}{3}+\frac{5p_2}{8}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで，l'の各要素は非負で，それらの総和は1であるから，“くじ”l'の結果が確率ベクトルならば，“くじ”l'も確率ベクトルとなる。さらに，

この式から容易に理解されるように，l'はベクトルの和，スカラーとの積によって

$$l' = (p_1 \cdot a_1,\ p_2 \cdot a_2)$$
$$= p_1 a_1 + p_2 a_2$$

と表現される。この結論は任意の確率ベクトルに対しても成立する。したがって，結果が確率ベクトルであるような“くじ”の集合は確率ベクトルの集合そのものである。

それゆえに，演算$\dot{+}$，・が，それぞれ，ベクトルの和，スカラーとの積であるならば，確率ベクトルの集合は条件M1を満たす。また，“くじ”の性質から条件M2と条件M4の成立は明らかであり，ベクトル演算によって条件M3の成立も容易に検証されうる。このように，結果が確率ベクトルであるような“くじ”の集合は確率ベクトルの集合であり，また混合集合でもある。

さて，2つの単純確率分布b_1, b_2において$b_1(X_1)$, $b_2(X_1)$は，それぞれ，事象$X_1 \subset X$が起こる確率を示している。それゆえに

$$l'' = (p_1 \cdot b_1,\ p_2 \cdot b_2),\ p_1 + p_2 = 1,\ p_1,\ p_2 \geqq 0$$

においては，$p_1 b_1(X_1)$は“くじ”l''においてb_1がおこり，かつ，単純確率分布b_1においてX_1が起こる確率を示し，$p_2 b_2(X_1)$は“くじ”l''においてb_2が起こり，かつ，単純確率分布b_2においてX_1が起こる確率を示している。したがって，$(p_1 \cdot b_1,\ p_2 \cdot b_2)$は事象$X_1$の確率が，$p_1 b_1(X_1) + p_2 b_2(X_1)$であるような確率分布であり，この確率分布は

$$l'' = (p_1 \cdot b_1,\ p_2 \cdot b_2)$$
$$= p_1 b_1 + p_2 b_2$$

と表現されている（Jensen, 1967, Fishburn, 1970）。また，この確率分布$p_1 b_1 + p_2 b_2$が単純確率分布であることは定義2．1によって容易に確認される。したがって，“くじ”l''の結果が単純確率分布であるならば，“くじ”l''も単純確率分布となる。

そこで，また，

$$l'' = (p_1 \cdot b_1,\ p_2 \cdot b_2)$$
$$= p_1 \cdot b_1 \dot{+} p_2 \cdot b_2$$

と表現しよう。そのとき，演算$\dot{+}$，・が，それぞれ，実数の和，積であるならば，単純確率分布の集合は上述のように条件$M1$を満たす。また，条件$M2$，$M3$，$M4$の成立も容易に検証できる。

このように，結果が単純確率分布であるような“くじ”の集合は単純確率分布の集合であり，また混合集合でもある。

本書では，混合集合を“くじ”の集合と考える解釈のもとで議論を進めることにしよう。

4. 選好関係

4－1　2項関係

期待効用の基礎である，選択対象間の選好関係を定義するために，２項関係といくつかの性質を考察しよう。

集合Yにおける**２項関係**（binary relation）Aとは，Yの要素y_1，y_2に対して，順序付きの組合せ（y_1，y_2）の集合の部分集合である，すなわち，

$$A = \{(y_1,\ y_2) \mid y_1,\ y_2 \in Y\}$$

普通，$(y_1,\ y_2) \in A$は，記号Aを使って，$y_1 A y_2$と書かれる。また，not $y_1 A y_2$は（y_1，y_2）$\notin A$を意味する。

例，$Y = \{1, 2, 3\}$であり，２項関係Aが$>$であるならば

$$> = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

となる，すなわち，

$$> = \{(y_1,\ y_2) \mid y_1 > y_2,\ y_1,\ y_2 \in Y\}$$

対象y_1，y_2における関係$>$を集合の記号として使用しているものと解釈すれば容易に理解できるであろう。

２項関係としてつぎの４つの性質を説明しよう（Fishburn, 1970, p. 10)。

***B* 1.　反射性**（reflexiveness).　もし全ての $y \in Y$ に対して，yAy であるならば A は反射的である。

例．$Y = \{1, 2, 3\}$ であり，A が＝であれば，＝は反射的である。

***B* 2.　連結性**（connectedness or completeness).　もし全ての y_1，$y_2 \in Y$ に対して，$y_1 A y_2$ か $y_2 A y_1$ の少なくともどちらか一つが成立するならば，A は連結的である。

例．$Y = \{1, 2, 3\}$ であり，A が≧であれば≧は連結的である。

***B* 3.　推移性**（transtivity).　もし全ての y_1，y_2，$y_3 \in Y$ に対して，$y_1 A y_2$ かつ $y_2 A y_3$ が $y_1 A y_3$ を成立させるならば，A は推移的である。

例．$Y = \{1, 2, 3\}$ であり，A が＞であれば＞は推移的である。

***B* 4.　歪対称性**（antisymmetry).　もし全ての y_1，$y_2 \in Y$ に対して，$y_1 A y_2$ かつ $y_2 A y_1$ が $y_1 = y_2$ を成立させるならば，A は歪対称である。

例．$Y = \{1, 2, 3\}$ であり，A が≧であるならば，≧は歪対称である。一方，Y ＝{三木，福田，中曽根}であり，A が身長の大小関係≧であれば，身長の大小関係≧は歪対称でない。なぜならば，三木の身長≧福田の身長かつ福田の身長≧三木の身長であるとしても，三木と福田は同一人物ではない。

4－2　弱順序・全順序・半順序

前節の2項関係を使って，選好における弱順序，全順序，半順序を定義しよう（Roberts, 1979, p. 28)。まず，基本として選好関係 $\succsim$ を使う。**選好関係** $\succsim$ では，$y_1 \succsim y_2$ が y_2 より y_1 を選好するか y_1 と y_2 を無差別とするかのどちらかであるとしよう。

定義 2.3　弱順序（weak order).　集合 Y の上で定義された選好関係 $\succsim$ は，つぎの条件（1），（2）が成立するならば，弱順序である；

（1）（連結性).　全ての y_1，$y_2 \in Y$ に対して，$y_1 \succsim y_2$ か $y_2 \succsim y_1$ のうち少なくとも，どちらか一つが成立する。

（2）（推移性).　全ての y_1，y_2，y_3 に対して，$y_1 \succsim y_2$ かつ $y_2 \succsim y_3$ である

ならば，$y_1 \succsim y_3$ である。

つぎに，選好関係$\succsim$の弱順序から，選好関係$\succ$（$y_1 \succ y_2$ は y_2 よりy_1を選好することを意味する。），$\sim$（$y_1 \sim y_2$ は y_1 と y_2を無差別とすることを意味する。）を定義しよう。

定義 2．4（$\succ$）．　$y_1 \succsim y_2$ かつ not $y_2 \succsim y_1$ であるならば，$y_1 \succ y_2$ である。

定義 2．5（$\sim$）．　$y_1 \succsim y_2$ かつ $y_2 \succsim y_1$ であるならば，$y_1 \sim y_2$ である。

上記の 3 つの定義からつぎのような性質が導きだされる。

弱順序選好の諸性質；

(1)　（反射性）．　$y \succsim y$．

(2)　$y_1 \succ y_2$ ならば not $y_2 \succsim y_1$．

(3)　$y_1 \succ y_2$ なるための必要充分条件は $y_1 \succsim y_2$ かつ not $y_1 \sim y_2$ である。

(4)　$y_1 \succ y_2$ かつ $y_2 \succ y_3$ ならば $y_1 \succ y_3$．

(5)　$y_1 \sim y_2$ かつ $y_2 \sim y_3$ ならば $y_1 \sim y_3$．

(6)　$y_1 \succ y_2$ かつ $y_2 \sim y_3$ ならば $y_1 \succ y_3$．

(7)　$y_1 \succ y_2$，$y_1 \sim y_2$，$y_2 \succ y_1$のうちどれか一つだけが成立する。

歪対称であるような弱順序は全順序と呼ばれる。全順序の中で最も手近な例は実数の大小関係$\geq$である。

定義 2．6 全順序（total order）．　集合Yで定義された選好関係$\succsim$は，つぎの条件（1），（2），（3）が成立するならば，全順序である；

(1)　（連結性）．

(2)　（推移性）．

(3)　（歪対称性）．　全ての y_1，$y_2 \in Y$ に対して，$y_1 \succsim y_2$ かつ $y_2 \succsim y_1$であるならば，$y_1 = y_2$ である。

弱順序と全順序を区別する理由は，弱順序では，異なった要素 y_1，y_2（$\in Y$）に対して $y_1 \succsim y_2$ かつ $y_2 \succsim y_1$の可能性が存在することである。

定義 2.7 半順序 (partial order or semi order). 集合Yで定義された選好関係$\succsim$は，つぎの条件 (1), (2), (3) が成立するならば，半順序である；

(1)　(反射性). 全ての$y \in Y$に対して$y \succsim y$である。

(2)　(推移性).

(3)　(歪対称性).

集合Yがベクトルの集合で，２項関係がベクトルにおける$\geq$であるとき，$\geq$は半順序である。例えば，集合Yには (2, 1), (1, 2) なる２つのベクトルが含まれており，これらのベクトルには関係$\geq$が成立しない。全順序は半順序であるが，半順序は全順序ではない。

表２－１　順序と諸性質（順序を定義する諸性質だけを示す。）

	弱 順 序	全 順 序	半 順 序
連 結 性	○	○	
反 射 性			○
推 移 性	○	○	○
歪 対 称 性		○	○

5. 効用関数

5－1　線型効用関数と期待効用

前節で，我々は選好関係を定義したが，ある公理系のもとで選択対象$y \in Y$に対する意思決定者の選好程度を表現する関数uが導出される。そのとき，$y \in Y$に対する選好程度を反映する，一つの実数としての$u(y)$はyの効用と呼ばれ，意思決定者の選好程度を表現する関数uは効用関数と呼ばれる。

定義 2.8 順序保存性 (order preserving). 効用関数uが順序保存的であると呼ばれるための条件は；

全ての$y_1, y_2 \in Y$に対して$y_1 \succsim y_2$であるため必要充分条件が$u(y_1) \geq u(y_2)$

である。すなわち，全ての $y_1, y_2 \in Y$ に対して

$$y_1 \succsim y_2 \Longleftrightarrow u(y_1) \geq u(y_2)$$

となることである。

明らかなように，効用の順序 $u(y_1) \geq u(y_2)$ は y_1, y_2 の順序 $y_1 \succsim y_2$ を保存している（Fishburn, 1970, p. 14）。

また，2項関係 $\succsim$ が弱順序であれば，全ての $y_1, y_2 \in Y$ に対して

$$y_1 \sim y_2 \Longleftrightarrow u(y_1) = u(y_2),$$

$$y_1 \succ y_2 \Longleftrightarrow u(y_1) > u(y_2)$$

の成立が容易に検証できる。

例えば，定義2.5より，$y_1 \succsim y_2$ かつ $y_2 \succsim y_1$ ならば，$y_1 \sim y_2$ である。そして，効用の**順序保存性**，

$$y_1 \succsim y_2 \Longleftrightarrow u(y_1) \geq u(y_2),$$

$$y_2 \succsim y_1 \Longleftrightarrow u(y_2) \geq u(y_1)$$

が同時に成立するためには，$u(y_1) = u(y_2)$ が成立しなければならない。一方，$u(y_1) = u(y_2)$ ならば，同様に $y_1 \sim y_2$ となる。

効用関数は，順序保存的であるとき，**順序効用関数**（ordinal utility function）とも言われる（Roberts, 1979, p. 102）。

定義2.9 線型性（linear property）. 効用関数 u が線型であると言われるための条件は；

全ての $y_1, y_2 \in Y$ と全ての $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$u\{\alpha \cdot y_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot y_2\} = \alpha u(y_1) + (1-\alpha) u(y_2)$$

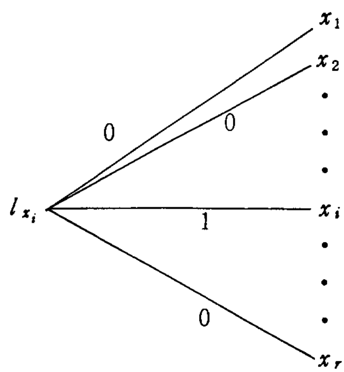
となることである。ただし演算 $\dot{+}$，・は前節で定義した混合集合における演算である。

本章の3－3節「混合集合」で議論したように，演算 $\dot{+}$，・は実数における演算＋，×だけではなかった。それゆえに，効用関数の線型性は，厳密には，演算＋，・に関して成立すると言われるべきである。混合集合が確率ベクトル

の集合R_pであるとき，演算$\dot{+}$，・はベクトル演算＋，スカラーとの積×であり，単純確率分布の集合ではそれらは実数演算＋，×であったことに注意されたい。このような説明をしている理由は**線型効用**が必ずしも期待効用でないことに注目するためである。期待効用は確実な結果の集合Xの上で定義された効用関数を必要とする。それに反して，上述の線型効用は，一般的には，混合集合の上で定義された効用関数によって定められる。

そこで，“くじ”の集合Ωにおいて，線型効用を期待効用に拡張するプロセスを考察しよう。いま，確実な結果$x_i \in X$を確率1で与えるような“くじ”l_{x_i}

図　2－5



の効用は$u(l_{x_i})$で与えられる。一方，“くじ”l_{x_i}と確実な結果x_iを同一視することが可能である。そこで，確実な結果x_iの効用は“くじ”l_{x_i}の効用であると定義しよう。すなわち，

$$u(x_i) = u(l_{x_i}) \qquad (2.\ 4)$$

と定義しよう。

そのとき，効用関数の線型性，すなわち，

$$u(\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2) = \alpha u(l_1) + (1-\alpha) u(l_2)$$

を，逐次，適用するとき，

$$u(l)=u(p_1\cdot l_{x_1}\dot{+}p_2\cdot l_{x_2}\dot{+},\cdots,\dot{+}p_r\cdot l_{x_r})$$
$$=\sum_{i=1}^{r}p_i u(l_{x_i})$$
$$=\sum_{i=1}^{r}p_i u(x_i)$$

となり，期待効用の形式が導出される。いま

$$E(u,\ l)=\sum_{i=1}^{r}p_i u(x_i) \qquad (2.\ 5)$$

と記すことにしよう。

定義 2.10.　“くじ” l の**期待効用**（expected utility）とはつぎの条件を満たすような$E(u,\ l)$ である；

全ての$l_1,\ l_2\in\Omega$ に対して

$$l_1\succsim l_2 \Longleftrightarrow E(u,\ l_1)\geq E(u,\ l_2) \qquad (2.\ 6)$$

順序保存的かつ線型的な効用関数は**基数的効用関数**（cardinal utility function）と呼ばれる。

したがって，期待効用も基数的効用である。形式的には，期待効用を定義する確実な結果の集合Xは現金，自動車，人間の行動など，考えられる全ての対象を含むとすることも可能である。

5－2　確実等価額とリスク・プレミアム

確実な結果の集合Xの要素は金額であるとしよう。すなわち，集合Xは金額の集合である。そしてリスクの要素を含む有価証券，投資などを代表的に“くじ”として表現することにする。いま，金額の集合Xの上で定義された“くじ” l をもつ意思決定者を考えよう。意思決定者がある金額 x^* より高い値段では“くじ” l を喜んで売るが，この金額 x^* より安い値段では売らないならば，この金額 x^* は “くじ” l に対する意思決定者の**確実等価額**(certainty equivalent), あるいは，“くじ” l の確実等価額と言われる。明らかなように，確実等価額は “くじ” l の**売り値**である。

この確実等価額が，期待効用では，いかに定義されるかを考察しよう。意思

決定者は集合Xの上で定義された効用関数uをもち，その効用関数uは連続であるとしよう(効用関数の連続性に関しては付録5，参照)。さらに，効用関数uは“くじ”lから生じる金額の変化，すなわち，status quoからの金額の変化に対する選好の程度を表現すると仮定しよう。この最後の仮定は，本書の初期条件の視点から言えば，問題点を有するが，ここでは，一応，容認することにしよう。

意思決定者にとって確実等価額x^*と“くじ”lは無差別である。それゆえに，効用関数uの性質によってこれを表現すると

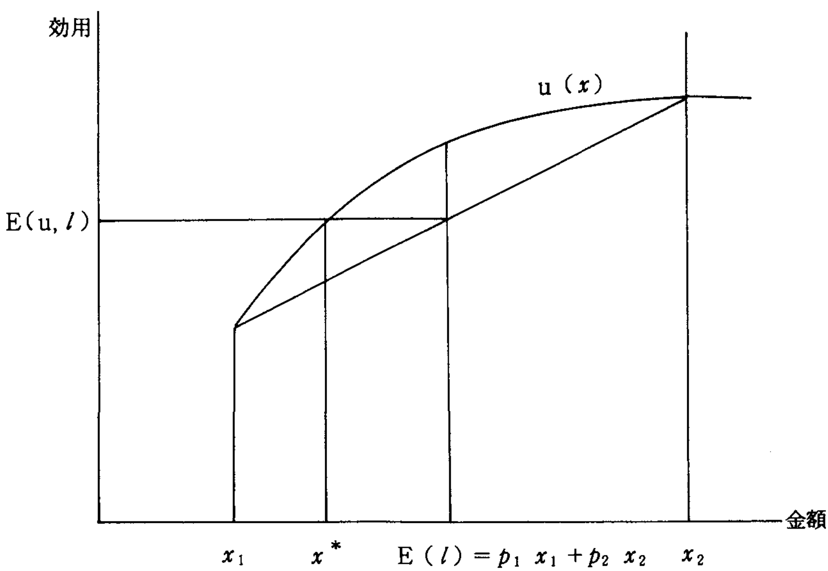
$$u(x^*)=E(u,\ l) \tag{2. 7}$$

となる。もし意思決定者がリスク回避的であるならば，意思決定者は“くじ”lの期待金額$E(l)$より少ない金額x^*に売り値をつけるだろう。すなわち，

$$E(l)-x^*=\pi(l)>0 \tag{2. 8}$$

となる。この$\pi(l)$は**リスク・プレミアム**（risk premium）と呼ばれる。

図　2－6



リスク・プレミアムは，"くじ" l によって得られる金額が "くじ" l の期待金額より充分に小さくなるかもしれないというリスクを避けるために，意思決定者が期待金額を断念し確実な金額を得ようとするとき，期待金額からの犠牲分として支払われる最大限度額を表す。

第3章で示すように，リスク・プレミアムが正であるとき効用関数 u は凹（concave）となる。この効用関数 u において，"くじ" $l=(p_1\cdot x_1, p_2\cdot x_2)$，期待金額 $E(l)$，確実等価額 x^*，期待効用の関係を図解すると図2－6のようになる。

6. 記述的解釈と規範的解釈

意思決定に関する理論は記述的，規範的という2つの視点によって，しばしば，分類されている。**記述的理論**（descriptive theory）は意思決定者が現実においていかに決定をなしているかを説明，あるいは，記述することに重点を置く。一方，**規範的理論**（normative theory）は意思決定者がいかに決定をなすべきかを示すことに重点を置く。

したがって，記述的理論の有効性は現実を説明する能力や現実を予測する能力によって判定される。規範的理論の目標は，ある所与の目的のもとで，この目的を追求する意思決定者に，利用可能な情報を使ってその目的を達成する最善の方法を提供することである。

期待効用もこの2つの視点から，しばしば，解釈されるが，規範的理論としての有効性を判定するには記述的側面を無視することは不可能である。この点に関して簡単に議論しよう。

いま，上で述べたように，規範的理論には所与の目的が必要とされた。期待効用においてはその目的に記述的性格が含まれる。後に議論するように，期待効用はある公理系から導出される。それゆえに，期待効用の目的はその公理系によって定式化されている。そして，公理系は意思決定者に対する記述的前提

である。例えば，公理の一つである選好の弱順序性は記述的表現である。

すなわち，連結性では，$y_1, y_2 \in Y$ に対して意思決定者は $y_1 \succsim y_2$，$y_2 \succsim y_1$ のうち少なくとも一つを成立させ，また，推移性では，$y_1, y_2, y_3 \in Y$ に対して $y_1 \succsim y_2$ かつ $y_2 \succsim y_3$ ならば意思決定者は $y_1 \succsim y_3$ を示すという予測が公理の内容に含まれている。

したがって，公理の記述的妥当性が確証されることによって，規範的理論として期待効用を有効にすることが可能であるようにみえる。しかしながら，たとえ公理の記述的妥当性が確証されたとしても，期待効用は規範的理論としてまだ充分でない。なぜならば，現実の意思決定に重要な影響を与える要素が公理系には欠落しているかもしれない。

"現実の意思決定に重要な影響を与える" という表現の内容は明らかに記述的である。本書における，期待効用に対する批判的視点である初期条件はその欠落の一例であろう。また，第7章 "小世界と制約された合理性" における "制約された合理性" もその一つであろう。しかしながら，この欠落は無視しうるほどのものであると一部の人々は考えるかもしれない。この問題の正否を判定するためには，規範的議論だけでなく，記述的議論の展開が必要とされるだろう。

期待効用の記述的妥当性，すなわち，予測能力に関しては，第6章2節 "期待効用仮説と効用の測定" で，その意味がより詳しく議論される。

第３章　期待効用理論

1. は じ め に

本章では期待効用理論の内容を展開する。後に議論される諸問題に対する解釈に必要な洞察力を提供することが第一義とされる。それゆえに，期待効用の公理系は最も簡単であると考えられる Marschak 型とし，期待効用は“くじ”のもとで考察される。期待効用定理に対する理解を深めるためには，効用関数の導出プロセスを熟知することは有意義であるし，さらに，後の詳細な議論の真意をくみ取るうえでも有益ではあるが，数学的にやや煩雑であるゆえに，これについては付録１にまわすことにした。その代りとしてある“くじ”の期待効用を算定する例題を解説しよう。

期待効用理論の二本柱の一つであるリスク回避理論，とくに，リスク回避関数についての議論は本書における主たる批判的視点である初期条件に深く関係している。そこで，リスク回避に関連する諸概念を明確にしておこう。

２節では，Marschak 型（1950)，すなわち，弱順序，代替性，連続性の諸公理からなる公理系をとりあげ，この公理系を解説することにする。しかし，公理系における選択対象の集合は Marschak における確率ベクトルではなく，“くじ”によって定義されている。さらに，Marschak の公理系における構造上の公理Ｍ４（第８章３節「Marschakの公理系」，参照）は省かれている。

３節では，前節で解説された公理系を使って，ある“くじ”の期待効用算定のプロセスを例題により解説することにする。本節の議論には冗長な点が存在するかもしれないが，それの意図は解釈に重点を置いている。

４－１節では，リスク回避的，リスク中立的，リスク愛好的な効用関数の特性を，それぞれ，定義し，解説することにする。４－２節では，意思決定者の

リスク回避が効用関数を通じてどのようにして測定されるかという点から，初期資産すなわち初期条件が考慮に入るときのリスク・プレミアムと確実等価額ならびにリスク回避関数を定義し，解説することにする。リスク・プレミアムは特定の“くじ”に対する，意思決定者のリスク回避を表現しているとみなされる。一方，リスク回避関数は初期条件の関数であり，初期条件によって意思決定者のリスク回避がどのように変化するかを示している。本節の視点から言えば，第2章5—2節で導入したリスク・プレミアムと確実等価額は初期資産がゼロであるときの，あるいは，選択対象の効用が初期資産からの増分として算定されたときのそれらに対応している。なお，第5章2—2節「増分型と初期条件」においてこの点に関連した議論がなされる。

4—3節では，リスク回避理論の主たる結果であるPratt（1964）の定理が示される。この定理ではリスク・プレミアムとリスク回避関数の間に存在する明確な関係が表現されている。さらに，リスク回避関数の中で，特に重要な逓減リスク回避関数と一定リスク回避関数を定義しておこう。

4—4節では，リスク的初期条件におけるRoss（1981）のリスク回避概念とそれに関する諸結果を述べておこう。本節におけるRossのリスク回避概念が後の議論で用いられることはない。しかしながら，リスク的初期条件を期待効用理論に含めることが非現実的でないこと，より強くは，現実的であることの検証として，また第4章以降で議論されるリスク的初期条件における効用関数の存在問題に対する“一般的な認識”の程度をうかがうにも，本節の議論は有効であろう。

2. 期待効用定理

“くじ”の集合Ωから一つの“くじ”lを選択しなければならない意思決定者が居るとしよう。“くじ”lは確実な結果の集合Xの上で定義されており，“くじ”lによって結果x_iが得られる確率はp_iとしよう。そのとき，“くじ”

l は

$$l = (p_1 \cdot x_1,\ p_2 \cdot x_2,\ \cdots,\ p_r \cdot x_r)$$

と表現される。ただし

$$\sum_{i=1}^{r} p_i = 1,\quad p_i \geq 0,\quad i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\quad r$$

である。意思決定者が以下に示すような公理系を満たす決定をなすとき，意思決定者の効用関数 u の存在が**期待効用定理**によって保証される。

定理3.1　“くじ”の期待効用定理（expected utility theorem）.

集合 Ω は集合 X の上で定義された“くじ”の集合であり，$\succsim$ は Ω の上で定義された選好関係としよう。

そのとき，$l_1, l_2 \in \Omega$ に対して

$$l_1 \succsim l_2 \Longleftrightarrow E(u,\ l_1) \geq E(u,\ l_2) \tag{3.1}$$

を満足する，X の上で定義された関数 u が存在するための必要充分条件はつぎの公理系が成立することである。

さらに，式（3.1）における関数 u は**正の線型変換まで一意的**である。

公理系

全ての $l_1,\ l_2,\ l_3 \in \Omega$ に対して

公理1．弱順序：集合 Ω の上で定義された選好関係 $\succsim$ は弱順序である。

公理2．連続性（continuity）：もし $l_1 \succ l_2 \succ l_3$ であるならば，そのとき

$$l_2 \sim \alpha^* \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha^*) \cdot l_3 \tag{3.2}$$

であるような $\alpha^* \in (0,\ 1)$ がただ一つ存在する。

公理3．代替性（substitutability）：もし $l_1 \sim l_2$ であるならば，そのとき全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ と全ての $l_3 \in \Omega$ に対して

$$\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_3 \sim \alpha \cdot l_2 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_3 \tag{3.3}$$

である。

上に挙げた公理1，2，3が**期待効用の公理**（axiom）と呼ばれているものである。ここでは，各公理の批判には立ち入らず，公理の意味を説明しよう。公理の妥当性を含む諸問題は第9章「公理系の評価」で議論される。この定理の証明は付録1にある。

公理1：弱順序

定義2. 3が示すように弱順序は連結性と推移性からなる。

連結性は全ての“くじ” $l_1, l_2 \in \Omega$ に対して $l_1 \succsim l_2$ か $l_2 \succsim l_1$ のうち少なくともどちらか一つが成立することであり，また $l_1 \succ l_2$，$l_1 \sim l_2$，$l_2 \succ l_1$ のうちどれか一つだけが成立することを意味する。なぜならば，(1) $l_1 \succsim l_2$ かつ $l_2 \succsim l_1$ が成立するとき，定義2. 5より $l_1 \sim l_2$ となる。(2) $l_1 \succsim l_2$ かつ not $l_2 \succsim l_1$ が成立するとき，定義2. 4より $l_1 \succ l_2$ となる。(3) $l_2 \succsim l_1$ かつ not $l_1 \succsim l_2$ が成立するとき，定義2. 4より $l_2 \succ l_1$ となる。l_1 と l_2 の間における選好関係は(1)，(2)，(3)のどれか一つだけに適合する。

推移性は，全ての“くじ” $l_1, l_2, l_3 \in \Omega$ に対して，$l_1 \succsim l_2$ かつ $l_2 \succsim l_3$ ならば $l_1 \succsim l_3$ を要求する。

この“くじ”の弱順序は確実な結果の弱順序を含んでいることに注意されたい。なぜならば，確実な結果 x_i を確率1で与えるような“くじ” l_{x_i} を考えよう。そのとき，意思決定者は“くじ” l_{x_i} と確実な結果 x_i を同一視することができる。したがって，l_{x_i} の弱順序性は確実な結果 x_i の弱順序性に移行することが可能となる。

公理2：連続性

第2章3節「“くじ”と混合集合」における議論のように，$\alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_3$ は確率 α で l_1 が得られ，確率（$1-\alpha$）で l_3 が得られる“くじ”と解釈

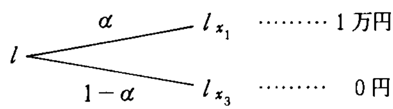
される。そのとき，この公理の連続性は，αが連続的に変化するとき，l_2と$\alpha\cdot l_1\dot{+}(1-\alpha)\cdot l_3$の間における選好関係が連続的に変化することを意味する。

説明のために，$x_1=1$万円，$x_2=5$千円，$x_3=0$円としよう。また，確実な結果x_iを確率１で与えるような“くじ”l_{x_i}を考えよう（図２－５を参照せよ）。そして，$x_1\succ x_2\succ x_3$，すなわち，$l_{x_1}\succ l_{x_2}\succ l_{x_3}$と仮定しよう。もし“くじ”$l$が

$$l=\alpha\cdot l_{x_1}\dot{+}(1-\alpha)\cdot l_{x_3}$$

であるならば，そのとき$\alpha=1$ではlは１万円相当であるゆえに，$l\succ l_{x_2}$であり，$\alpha=0$ではlは０円相当であるゆえに，$l_{x_2}\succ l$となる。

図　３－１



そして，αが１から少し小さくなるならば，lに対する選好の程度が微妙に変化するだろう。連続的にαが１から０の方向に変化していくとき，lに対する意思決定者の選好程度が連続的に下り，あるα^*の値で

$$\alpha^*\cdot l_{x_1}\dot{+}(1-\alpha^*)\cdot l_{x_3}\sim l_{x_2}$$

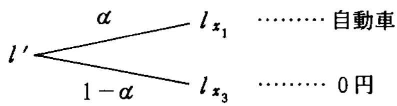
となること，これを公理２は要求している。

公理３：代替性

さて，意思決定者は２つの“くじ”l'とl''のどちらかを選択しなければならないとしよう。ただし$l'=\alpha\cdot l_1\dot{+}(1-\alpha)\cdot l_3$，$l''=\alpha\cdot l_2\dot{+}(1-\alpha)\cdot l_3$であるとする。“くじ”$l'$と$l''$の相違は$l'$では$l_1$を確率$\alpha$で，$l''$では$l_2$を確率$\alpha$で得られるという点だけである。そのとき，$l_1\sim l_2$であるならば，意思決定者は$l'$と$l''$に対して無差別であるべきであること，これを公理３は要求する。

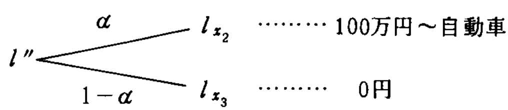
説明のために，x_1 ＝自動車，x_2 = 100万円，x_3 = 0円としておこう。そして，また，確実な結果 x_i を確率1で与えるような“くじ” l_{x_i} を考えよう(図2−5を参照せよ)。さらに，x_1 = 自動車と x_2 = 100万円は無差別であるとしよう。すなわち，$l_{x_1} \sim l_{x_2}$ であるとしよう。

図 3 − 2



いま，$l' = \alpha \cdot l_{x_1} \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_{x_3}$，すなわち，自動車が確率$\alpha$で，0円が確率（$1-\alpha$）で得られることに相当するような“くじ” l'を考えよう。さらに，自動車と無差別な100万円を，自動車と入れ替えた“くじ”をl''としよう。すなわち，$l'' = \alpha \cdot l_{x_2} \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_{x_3}$としよう。

図 3 − 3



そのとき，自動車と100万円が無差別であるならば，すなわち，$l_{x_1} \sim l_{x_2}$ であるならば，無差別な結果 l_{x_2} を“くじ” l'に代入した“くじ” l''がもとの“くじ” l'と無差別であることを公理3は要求している。

さらに，我々は x_3 = 0円としたが，x_3が任意の対象であるときにも，“くじ” l'とl''が無差別であることも公理3は要求している。

正の線型変換までの一意性

期待効用定理における効用関数uが正の線型変換まで一意的であることについて簡単な注釈をしておこう。正の線型変換まで一意的であることの意味はつぎの内容である；

もし関数 u が式（3．1）を満すならば，全ての $\delta>0$，γ と全ての $x\in X$ に対して

$$v(x)=\delta u(x)+\gamma \qquad (3.\ 4)$$

なる関数 v もつぎの条件 A を満足する；

条件 A，全ての $l_1,\ l_2\in\Omega$ に対して

$$l_1 \succsim l_2 \Longleftrightarrow E(v,\ l_1)\geq E(v,\ l_2)$$

また関数 v が条件 A を満足するならば，式（3．4）を成立させるような $\delta>0,\ \gamma$ が存在する。

したがって，$u(x_1)>u(x_2)$ なる2つの $x_1,\ x_2\in X$ に対して $\delta>0$，γ を適当に選ぶことによって式（3．4）より，

$$v(x_1)=1$$

$$v(x_2)=0 \qquad (3.\ 5)$$

とすることができる。

これは，適当に実数 $\delta>0,\ \gamma$ を選択することによって効用の数値を変えることが可能であることを示している。したがって，効用を示す数値そのものは効用関数が特定化されたときにのみ意味をもつ。このことは温度尺度との対比で説明されうる。ある対象の温度が絶対温度，摂氏，華氏のどの尺度で測定されようとも，それらは温度の表現としては同じである。しかしながら，それらは数値では相違する，そしてそれらの数値間には正の線型変換の関係がある。

3. 例　題 ── 効用の算定

本節では期待効用に対する理解を深めるために，前節における公理系を使って，ある特定の“くじ”の効用を算定する手続を解説しよう。結果の集合 X は1万円から100万円まで，1万円きざみの100個の金額から成立しているとしよう。そのとき，最も選好される要素 a は100万円で，最も選好されない要素 b は1万円となる。

さて，“くじ” l_x は x 万円が確率１で起ることを意味している。例えば，l_{30} は30万円が確率１で起る“くじ”である。そのとき，公理２すなわち式（3．2）より，$l_{100} \succ l_x \succ l_1$ なる l_x に対して

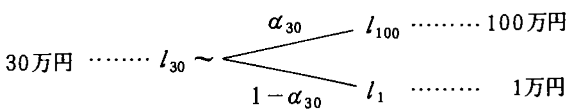
$$l_x \sim \alpha_x \cdot l_{100} \dot{+} (1-\alpha_x) \cdot l_1$$

なる $\alpha_x \in (0,\ 1)$ が存在する。例えば，

$$l_{30} \sim \alpha_{30} \cdot l_{100} \dot{+} (1-\alpha_{30}) \cdot l_1$$

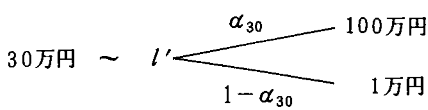
となる $\alpha_{30} \in (0,\ 1)$ が存在する。

図　3 － 4



換言すれば，100万円が確率 α_{30} で起り，１万円が確率（$1-\alpha_{30}$）で起る“くじ” $l'=\{\alpha_{30}\cdot 100$万円，$(1-\alpha_{30})\cdot 1$万円$\}$ が30万円と無差別であることを意味している。

図　3 － 5



そのとき，$a=100$万円，$b=1$万円が固定されているならば，30万円の効用は α_{30} ということができる。したがって，x 万円の効用は公理２すなわち式（3．2）によって定まる α_x となる。ここで，式（2．4）と同様に

$$\alpha_x = h(l_x) = h(x) \qquad (3.\ 6)$$

と定義しておこう。

さて，結果が“くじ” l_A，l_B であるような“くじ” $l = p_A \cdot l_A \dot{+} p_B \cdot l_B$ を考えよう。そして

$$l_A = (\frac{1}{2}\cdot 10\text{万円},\ \frac{1}{2}\cdot 15\text{万円})$$

$$l_B=(\frac{1}{4}\cdot 20\text{万円},\ \frac{1}{4}\cdot 15\text{万円},\ \frac{1}{2}\cdot 10\text{万円})$$

とし，$p_A=\frac{1}{3}$，$p_B=\frac{2}{3}$としよう。そのとき，

$$l=\frac{1}{3}\cdot l_A\dotplus\frac{2}{3}\cdot l_B \tag{3. 7}$$

となる。この“くじ” l の効用 $u(l)=h(l)$ を求めてみよう（Holloway, 1979, p.422)。

公理2すなわち式（3．2）より

$$l\sim h(l)\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l)\}\cdot l_1$$

なる $h(l)$ が存在する。さらに，

$$l_A\sim h(l_A)\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l_A)\}\cdot l_1 \tag{3. 8}$$

$$l_B\sim h(l_B)\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l_B)\}\cdot l_1 \tag{3. 9}$$

なる $h(l_A)$，$h(l_B)$ も存在する。

ここで，x 万円とは“くじ” l_x を指していると考えることにしよう。そのとき，

$$l_A=\frac{1}{2}\cdot l_{10}\dotplus\frac{1}{2}\cdot l_{15} \tag{3. 10}$$

$$l_B=\frac{1}{4}\cdot l_{20}\dotplus\frac{1}{4}\cdot l_{15}\dotplus\frac{1}{2}\cdot l_{10} \tag{3. 11}$$

と表現される。さらに，公理2から

$$l_{10}\sim h(l_{10})\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l_{10})\}\cdot l_1 \tag{3. 12}$$

$$l_{15}\sim h(l_{15})\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l_{15})\}\cdot l_1 \tag{3. 13}$$

$$l_{20}\sim h(l_{20})\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l_{20})\}\cdot l_1 \tag{3. 14}$$

が得られる。

式（3．10)，（3．11）における l_{10}，l_{15}，l_{20} を式（3．12)，（3．13)，（3．14）で代替させると，公理3すなわち式（3．3）から

$$\begin{aligned} l_A\sim &\frac{1}{2}\cdot[h(l_{10})\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l_{10})\}\cdot l_1] \\ &\dotplus\frac{1}{2}\cdot[h(l_{15})\cdot l_{100}\dotplus\{1-h(l_{15})\}\cdot l_1] \end{aligned}$$

$$l_B \sim \frac{1}{4} \cdot [h(l_{20}) \cdot l_{100} \dot{+} \{1-h(l_{20})\} \cdot l_1]$$
$$\dot{+} \frac{1}{4} \cdot [h(l_{15}) \cdot l_{100} \dot{+} \{1-h(l_{15})\} \cdot l_1]$$
$$\dot{+} \frac{1}{2} \cdot [h(l_{10}) \cdot l_{100} \dot{+} \{1-h(l_{10})\} \cdot l_1]$$

となる。そこで，式（2．3）を適用すると，

$$l_A \sim [\frac{1}{2} h(l_{10}) + \frac{1}{2} h(l_{15})] \cdot l_{100} \dot{+} [\frac{1}{2}\{1-h(l_{10})\} + \frac{1}{2}\{1-h(l_{15})\}] \cdot l_1 \quad (3.\ 15)$$

$$l_B \sim [\frac{1}{4} h(l_{20}) + \frac{1}{4} h(l_{15}) + \frac{1}{2} h(l_{10})] \cdot l_{100} \dot{+} [\frac{1}{4}\{1-h(l_{20})\} + \frac{1}{4}\{1-h(l_{15})\} + \frac{1}{2}\{1-h(l_{10})\}] \cdot l_1 \quad (3.\ 16)$$

が得られる。そのとき，公理2のα^*の一意性から，式（3．8），（3．9）と式（3．15），（3．16）を比較するとき，

$$h(l_A) = \frac{1}{2} h(l_{10}) + \frac{1}{2} h(l_{15}) \quad (3.\ 17)$$

$$h(l_B) = \frac{1}{4} h(l_{20}) + \frac{1}{4} h(l_{15}) + \frac{1}{2} h(l_{10}) \quad (3.\ 18)$$

となる。

一方，式（3．7）におけるl_A, l_Bを式（3．8），（3．9）で代替させると，

$$l \sim \frac{1}{3} \cdot [h(l_A) \cdot l_{100} \dot{+} \{1-h(l_A)\} \cdot l_1]$$
$$\dot{+} \frac{2}{3} \cdot [h(l_B) \cdot l_{100} \dot{+} \{1-h(l_B)\} \cdot l_1]$$

となり，式（2．3）より

$$l \sim [\frac{1}{3} h(l_A) + \frac{2}{3} h(l_B)] \cdot l_{100} \dot{+} [\frac{1}{3}\{1-h(l_A)\} + \frac{2}{3}\{1-h(l_B)\}] \cdot l_1$$

が得られる。

そのとき，公理2の α^* の一意性から

$$h(l)=\frac{1}{3}h(l_A)+\frac{2}{3}h(l_B) \qquad (3.\ 19)$$

となる。式（3．17)，（3．18）における $h(l_A)$, $h(l_B)$ を式（3．19）に代入すると

$$h(l)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}h(l_{10})+\frac{1}{2}h(l_{15})\right]+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}h(l_{20})+\frac{1}{4}h(l_{15})+\frac{1}{2}h(l_{10})\right]$$

$$=\frac{3}{6}h(l_{10})+\frac{2}{6}h(l_{15})+\frac{1}{6}h(l_{20})$$

が得られる。定義式（3．6）を使うと

$$h(l)=\frac{1}{2}h(10)+\frac{1}{3}h(15)+\frac{1}{6}h(20) \qquad (3.\ 20)$$

となり、"くじ" l の期待効用 $h(l)$ が導出された。

さて，$l=\frac{1}{3}\cdot l_A \dotplus \frac{2}{3}\cdot l_B$ を図で表現すると図3－6が得られる。

図　3　－　6

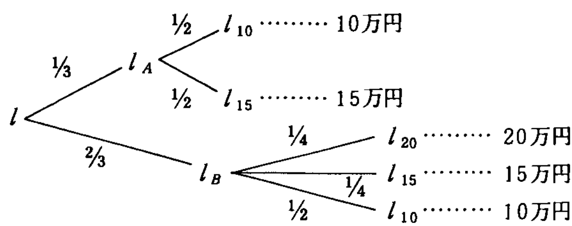


図3－6における "くじ" は図3－7のように簡略化される。

図　3　－　7

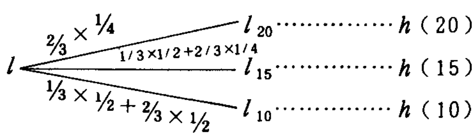


図3－7における l_{20}, l_{15}, l_{10} の効用 $h(20)$, $h(15)$, $h(10)$ に，それぞれ，確率 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ をかけ，和を算定すると，式（3．20）と同じ式が得られる。

4. リスク回避理論

4－1　リスク回避性向

意思決定者は結果の集合 X が金額によって定義されている"くじ"に関心があるとしよう。そのとき，効用関数は金額を示す数値の全ての上で定義されることを必要とするかもしれない。すなわち，効用関数はある範囲内の全ての実数上で定義されることを必要とするかもしれない。そこで，結果の集合 X は全ての実数からなるとしよう。

ここでは，実数直線上で定義された連続な効用関数への拡張が要求される。そのような効用関数の存在に関する議論は位相数学など，やや，高級な数学的知識を必要とするので，ここでは連続かつ微分可能な効用関数は存在するという仮定から出発しよう。（効用関数の連続性と微分可能性に関しては，付録5を参照されたい。）また，金額は大きくなればなるほどより選好されるので効用関数は増加関数である，すなわち，$x_1 > x_2$ に対して $u(x_1) > u(x_2)$ であることを仮定しておこう。

いま，意思決定者はつぎの2つの"くじ" l_1, l_2 に直面しているとしよう;

$$l_1 = (1 \cdot x_0,\ 0 \cdot 0)$$

$$l_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot x_1,\ \frac{1}{2} \cdot x_2\right)$$

ただし，$x^0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, x_0, x_1, $x_2 \in X$ である。"くじ" l が確率 α で x 円を与え，確率（$1-\alpha$）で0円を与えることを意味するならば

$$l = (\alpha \cdot x,\ (1-\alpha) \cdot 0)$$
$$= (\alpha \cdot x)$$

と表現しよう。したがって

$$l_1 = (1 \cdot x_0)$$

となる。"くじ" l_1, l_2 の期待効用は

$$u(l_1) = u(x_0)$$

$$u(l_2) = \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_2)$$

となる。

リスク回避的な（risk averse）ケース

全ての x_1, $x_2 \in X$ に対して意思決定者の選好関係が $l_1 \succ l_2$，すなわち

$$u(x_0) = u\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)$$
$$> \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_2)$$

ならば，その意思決定者はXのいたるところで**リスク回避的**（risk averse）と言われ，また，効用関数uがリスク回避的であるとも言われる。

例えば，$x_0 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = -x$, $x > 0$としよう。そのとき，

$$u(l_1) = u(0)$$

$$u(l_2) = \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(-x)$$

となる。意思決定者は $l_1 \succ l_2$ を示しているとしよう。"くじ" l_1 は意思決定者になんらの変化をもたらさない。しかるに，"くじ" l_2はxを得るチャンスとx円を損するチャンスが半々であり，その期待値が0円であることを示している。この場合，期待金額が同じ0円であっても，x円を損するかもしれないというリスクを意思決定者は回避している。

一般に，全ての x_1, $x_2 \in X$, $\alpha \in (0, 1)$ に対して，

$$u\{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\} > \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

なる不等式が成立するとき，関数 u は凹であると言われ，また，$u''(x) < 0$ となる。ただし，$u''(x)$ は２次導関数である。効用関数がリスク回避的であるならば，

$$u(l_1) > u(l_2)$$

すなわち

$$u(x_0) = u\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)$$
$$> \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}(x_2)$$

が成立する。したがって，そのとき効用関数 u は**凹関数**となる。

“くじ” l_2 の確実等価額を x^*とすれば，すなわち，$u(l_2) = u(x^*)$ とすれば，

$$u(x_0) > \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_2)$$
$$= u(x^*)$$

が成立する。効用関数 u の単調増加性から

$$x_0 > x^*$$

が得られる。したがって

$$x_0 - x^* = \pi(l_2) > 0$$

となり，リスク・プレミアム $\pi(l_2)$ は正となる。

図3－8 リスク回避

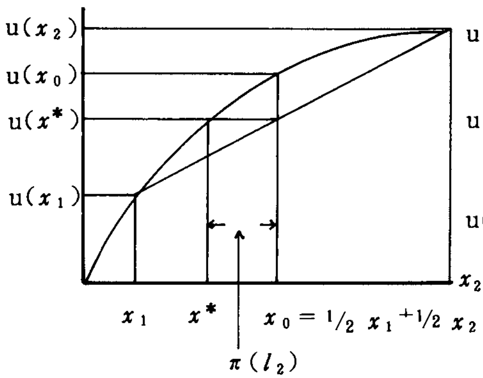
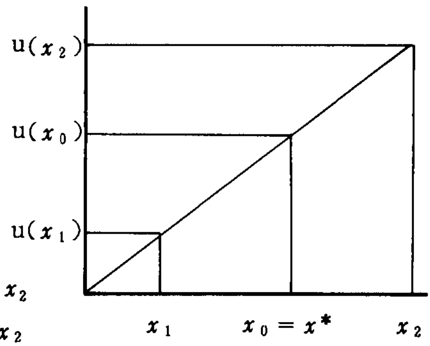


図3－9　リスク中立



リスク中立的な（risk neutral）ケース

全ての x_1，$x_2 \in X$ に対して，意思決定者が $l_1 \sim l_2$，すなわち $u(l_1) = u(l_2)$ を示すならば，そのとき，意思決定者の効用関数 u はXのいたるところで**リスク中立的**であると言われる。また，

$$u\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) = \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_2)$$

から効用関数は一次関数となる。したがって，$u''(x) = 0$ である。リスク・プレミアムは $u(x^0) = u(x^*)$ から

$$\begin{aligned} x^0 - x^* &= \pi(l_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

リスク愛好的な（risk prone）ケース

全ての x_1，$x_2 \in X$ に対して，意思決定者が $l_2 \succ l_1$，すなわち $u(l_2) >$

$u(l_1)$ を示すならば，その意思決定者の効用関数 u は X のいたるところで**リスク愛好的**であると言われる。また,

$$\frac{1}{2}u(x_1)+\frac{1}{2}u(x_2)>u(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2)$$

から，効用関数 u は**凸関数**となる。したがって $u''(x)>0$ となり，リスク・プレミアム $\pi(l_2)$ は負となる。

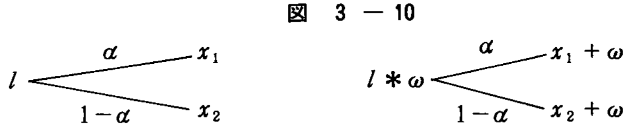
4—2 リスク回避関数

いままでは，効用関数 u は“くじ”から生じる金額の変化に対する選好表現であった。しかしながら，以後，効用関数 u は初期資産（あるいは初期条件）を考慮した資産全体の変化に対する選好を表現するものとしよう。いま，“資産”は金額で測定されたものと仮定しておこう。

そのとき，ここで問題とされることは，リスクに対する意思決定者の態度が効用関数によってどのように表現されるかである。それに対して直観的に最も理解しやすい概念はリスク・プレミアムであろう。そこで，まず，リスク回避関数との関連から，初期資産を考慮に入れたリスク・プレミアムとそれに関連する諸概念を簡単に議論しておこう。

さて，金額で測定された初期資産を ω としよう。ただし ω は確実な金額である。この初期資産の確実性は4章以降で問題とされる。“くじ” l の期待金額を $E(l)$ と記すことにする。そして，$l*\omega$ は“くじ” l の結果に ω を加えたものを結果とする“くじ”であるとしよう。この機能は“**たたみこみ**”と呼ばれる。また，$l*\omega=\omega*l$ である。

図 3 — 10



ある“くじ” l に対する意思決定者のリスク・プレミアム π は“くじ” l を

受け入れることと確実等価額 $x^* = \{E(l) - \pi\}$ を受け入れることを無差別にさせるような値である。一般的には，“くじ”の売値である確実等価額は初期資産によって変化するだろう。したがって，リスク・プレミアムは“くじ” l に依存するだけでなく，意思決定者の初期資産 ω にも依存する。それゆえに，**リスク・プレミアム**は $\pi(\omega, l)$ と表現されよう。以上から，形式的には，リスク・プレミアムは

$$u\{\omega + E(l) - \pi(\omega, l)\} = u(\omega * l) \tag{3. 21}$$

なる等式を満たす。

また，初期資産が ω から $(\omega + x)$ に変化し，“くじ”が l から $l * (-x)$ に変化したとき，同様に

$$u[\omega + x + E\{l * (-x)\} - \pi\{\omega + x, l * (-x)\}]$$
$$= u[(\omega + x) * \{l * (-x)\}]$$

が得られる。そして，この式を整理すると，

$$w[\omega + E(l) - \pi\{\omega + x, l * (-x)\}] = u(\omega * l) \tag{3. 22}$$

となる。したがって，式（3. 21)，(3. 22) から

$$\pi(\omega, l) = \pi\{\omega + x, l * (-x)\} \tag{3. 23}$$

が得られる。

確実等価額 $x^*(\omega, l)$ は

$$x^*(\omega, l) = E(l) - \pi(\omega, l) \tag{3. 24}$$

と定義される。

なお，確実等価額 $x^*(\omega, l)$ は式（2. 7）における x^* と同じであるが，初期条件 ω と“くじ” l が確実等価額に及ぼす影響を検討するためにこのような表現形式 $x^*(\omega, l)$ がとられている。また $\pi(\omega, l)$ についても同様の趣旨である。さらに，式（2. 7）の表現に沿った線で言えば，式（3. 21）から理解されるように $\pi(\omega, l) = \pi(\omega * l)$，$x^*(\omega, l) = x^*(\omega * l)$ と定義することができる。

一方，前節で述べたように，意思決定者のリスク回避的性向は効用関数の凹性として示される。そのとき効用関数の2次導関数u''は負であった。また，$u''>0$であれば，意思決定者はリスク愛好的であり，$u''=0$であれば，意思決定者はリスク中立的であった。このように，効用関数の2次導関数はリスク回避に対する一つの指標であるようにみえる。

しかしながら，効用関数は正の線型変換までは一意的である。それゆえに，効用関数に正の数を掛けることによって，効用関数の2次導関数は，符号が限定されているとはいえ，任意の値をとることができる。したがって，その値の大小は，期待効用においては，それ自身なんら積極的な意味をもたない。

このように，リスク回避の尺度は効用関数の正の線型変換のもとでは不変でなければならない。他方，リスク回避的であることは効用関数の凹性を意味していることから，リスク回避を表現する尺度は効用関数の2次導関数に基いて構成されなければならない。これらの考慮から，Arrow（1963, 1970）とPratt（1964）はリスク回避の程度を測定するために，上記の性質を有するものとして**リスク回避関数**（risk averse function）$r(\omega)$，すなわち，

$$r(\omega)=-\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)} \tag{3.25}$$

を導入した。

リスク・プレミアム$\pi(\omega, l)$は“くじ”lに依存するのに反して，リスク回避関数はそうではない。したがって，もし全ての“くじ”に対してリスク・プレミアムが有するある共通した性質をリスク回避関数が持っているならば，リスク回避関数はリスク回避の尺度として有用な道具となる。例えば，資産が増大すれば，意思決定者のリスク・プレミアムが，増々，減少することはリスク回避関数rの逓減性として特徴づけられる。さらに，Pratt（1964, p.126）は言う，“リスク回避は$\pi(\omega, l)$によって測定されるだろうが，πはrよりも，一層，複雑である。”しかしながら，第4章における議論から理解されるように，

πが常に取扱い難いものであるとは言えないだろう。

4－3　リスク回避関数に関する諸結果

いま，リスク回避関数とリスク・プレミアムの関係についてPratt (1964)の議論をみてみよう。初期資産ωをもつ意思決定者が“くじ” $l=(\frac{1}{2}\cdot\varepsilon, \frac{1}{2}\cdot -\varepsilon)$に直面しているとしよう。ただし，$\varepsilon$は充分に小さい。
そのとき，

$$u\{\omega+E(l)-\pi(\omega, l)\}=u(\omega * l)$$

が成立し，$E(l)=0$であるから，

$$u\{\omega-\pi(\omega, l)\}=\frac{1}{2}u(\omega+\varepsilon)+\frac{1}{2}u(\omega-\varepsilon)$$

となる。この式の両辺をωの周りでテイラー展開するとき，

$$u\{\omega-\pi(\omega, l)\}=u(\omega)-\pi(\omega, l)u'(\omega)+o(\pi^2),$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}u(\omega+\varepsilon)+\frac{1}{2}u(\omega-\varepsilon)\\&\quad=\frac{1}{2}\{u(\omega)+\varepsilon u'(\omega)+\frac{\varepsilon^2}{2}u''(\omega)+o(\varepsilon^3)\}\\&\qquad+\frac{1}{2}\{u(\omega)-\varepsilon u'(\omega)+\frac{\varepsilon^2}{2}u''(\omega)+o(\varepsilon^3)\}\end{aligned}$$

となる。ここで，$\pi(\omega, l)$，εの高次のオーダ$o(\pi^2)$，$o(\varepsilon^3)$が無視されるならば，そのとき，$-\pi(\omega, l)u'(\omega)\fallingdotseq\frac{1}{2}\varepsilon^2u''(\omega)$が得られ，式（3．25）によって

$$\pi(\omega, l)\fallingdotseq\frac{1}{2}\varepsilon^2 r(\omega) \qquad (3.26)$$

となる。このε^2は，“くじ” lが確率分布に対応させられるとき，それの分散に相等する。この注釈のもとでつぎのように言うことができる；「このような小さな“くじ”に対する意思決定者のリスク・プレミアムは“くじ” lの分散ε^2の半分に，初期資産ωにおけるリスク回避$r(\omega)$を掛けた値に等しい。」

さて，２つの効用関数u_1，u_2に対するリスク回避関数がr_1，r_2であり，

リスク・プレミアムが$\pi_1(\omega, l)$, $\pi_2(\omega, l)$であるとしよう。そのとき, 式（3．26）から近似的に

$$r_1(\omega) > r_2(\omega) \Longleftrightarrow \pi_1(\omega, l) > \pi_2(\omega, l) \qquad (3．27)$$

となる。このとき，効用関数u_1は効用関数u_2よりリスク回避的であると言われる。

式（3．27）はある初期資産ωと充分に小さいεに対して成立した。すなわち局所的（local）関係であった。しかしながら，大域的（global）関係としても，すなわち，任意の$\omega \in X$と退化していない任意の$l \in \Omega$に対しても同様のことが成立する。つぎの定理3．2，3．3はPratt(1964)の定理1，2から以後の議論に関連する部分を抜きだしたものである。

定理3．2（Pratt）．単調増加で，2回連続微分可能な効用関数u_1とu_2に対してつぎの3つの条件は同値である：

条件1．任意の$\omega \in X$に対して$r_1(\omega) \geq (>) r_2(\omega)$,

条件2．任意の$\omega \in X$，退化していない任意の$l \in \Omega$に対して

$$\pi_1(\omega, l) \geq (>) \pi_2(\omega, l)$$

条件3．$G' > 0$, $G'' \leq (<) 0$, $u_1 = G(u_2)$となるような関数Gが存在する。ただし，具体的には$G = u_1 \, u_2^{-1}$である。

なお，かっこ内の不等号＞は条件1で不等号＞が成立するならば条件2，3でも不等号＞が成立することを示す。

（証明）　付録2，参照。

さて，初期資産ωが増加するにつれて，リスク・プレミアムがますます小さくなる意思決定者を考えよう。すなわち，退化していない全ての$l \in \Omega$に対して$\pi(\omega, l)$がωの減少関数であるケースを考えよう。意思決定者のこの性向はリスク回避関数rの減少性として反映される。正の$x \in X$に対して$u_1(\omega) = u(\omega)$, $u_2(\omega) = u(\omega + x)$とおくことによって，定理3．2と定義$r(\omega) = -u''(\omega)/u'(\omega)$から直ちにつぎの定理3．3が得られる。

定理3.3（Pratt）．つぎの条件は同値である：

条件1．rはωの（狭義）減少関数である。

条件2．退化していない全ての$l \in \Omega$に対して$\pi(\omega, l)$はωの（狭義）減少関数である。

リスク・プレミアム$\pi(\omega, l)$はω，lの関数であるのに反して，リスク回避関数$r(\omega)$はωだけの関数である。したがって，$r(\omega)$は個々の"くじ"に関係なく意思決定者のリスク回避の程度を表現している。

逓減リスク回避関数（decreasing risk averse function）

もし$r' < 0$であるならば，効用関数uは逓減リスク回避関数をもつと言われる。

例1
$$u(x) = \log x \tag{3.28}$$
$$u'(x) = d\log x/dx = \frac{1}{x}$$
$$u''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$
$$= \frac{1}{x}$$
$$r'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

一定リスク回避関数（constant risk averse function）

もし$r' = 0$ならば，効用関数uは一定リスク回避関数をもつと言われる。この効用関数では，"くじ"が固定されたとき，リスク・プレミアムは全ての$\omega \in X$に対して一定である。

例2
$$u(x) = -e^{-cx}, \quad c > 0 \tag{3.29}$$
$$u'(x) = ce^{-cx}$$
$$u''(x) = -c^2e^{-cx}$$

$$r(x)=c$$

$$r'(x)=0$$

この関数 $u=-e^{-cx}(c>0)$ は凹である。すなわち，リスク回避的であるが，ある特定の“くじ”に対してリスク・プレミアムは常に一定となる。

4－4　リスク的初期条件におけるリスク回避

本節における Ross (1981) のリスク回避概念は後の議論では用いられない。しかしながら，我々の批判的視点である初期条件のリスク性に注目がなされている点で，Ross の議論に触れずにおくことは許されないようにみえる。

さて，リスク回避関数は初期条件が確実な金額であるときのリスク回避の程度を表現する尺度であった。初期条件がリスク的であるときにも，リスク回避関数が適切な尺度であるかどうかという疑問が生じる。

これに対して，S.A.Ross は言う，“意思決定者 A が意思決定者 B よりもリスク回避的であるならば，（本書の定理 3．2 により）A はリスクに対する保険料（すなわちリスク・プレミアム）を B よりも多く支払う用意があると結論される。しかしながら，一般には，意思決定者はリスクの一部を保険にかけ，リスクのその残りを維持しているにちがいない。この場合には，よりリスク回避的な意思決定者がより多くの保険料を支払う用意があるという結論はもはや正しくない。” いま，この事情を彼の例題からみてみよう。なお，リスク的初期条件においても効用関数は存在し，$u'>0$，$u''<0$ と仮定されている。

Ross の例題

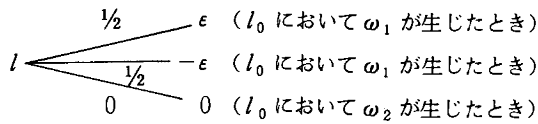
意思決定者の初期条件 l_0 は図 3－11 のように表わされ，そして，選択対象

図　3　－　11

$$l_0 \begin{cases} \xrightarrow{\;p\;} \omega_1 \\ \xrightarrow[\;1-p\;]{} \omega_2 \end{cases}$$

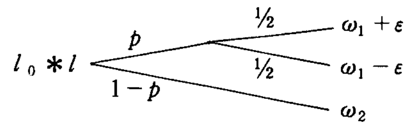
l が考慮されているとしよう。

図　3 — 12



そして，意思決定者は初期条件を含めた多重くじ $l_0 * l$ の効用に関心があるとしよう（多重くじに関しては第4章2節を参照されたい）。

図　3 — 13



そのとき

$$u(l_0 * l)=p\left\{\frac{1}{2}u(\omega_1+\varepsilon)+\frac{1}{2}u(\omega_1-\varepsilon)\right\}+(1-p)u(\omega_2) \tag{3.30}$$

となる。一方，初期条件 l_0 における"くじ" l のリスク・プレミアムが $\pi_u(l_0,\ l)$ とされるとき，$E(l)=0$ を考慮するならば，

$$\begin{aligned} u(l_0 * l) &= u[l_0 * \{E(l)-\pi_u(l_0,\ l)\}] \\ &= u[l_0 * \{-\pi_u(l_0,\ l)\}] \\ &= pu\{\omega_1-\pi_u(l_0,\ l)\}+(1-p)u\{\omega_2-\pi_u(l_0,\ l)\} \end{aligned} \tag{3.31}$$

となる。式（3．30）と式（3．31）の右辺を，充分に小さい ε に対して（したがって $\pi_u(l_0,\ l)$ も充分小さい），ω_1 と ω_2 の周りでテイラー展開するとき，

$$u(l_0 * l)\fallingdotseq pu(\omega_1)+(1-p)u(\omega_2)+\frac{1}{2}pu''(\omega_1)\varepsilon^2 \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} u[l_0 * \{-\pi_u(l_0,\ l)\}] \fallingdotseq{}& pu(\omega_1)+(1-p)u(\omega_2) \\ &-\{pu'(\omega_1)+(1-p)u'(\omega_2)\}\pi_u(l_0,\ l) \end{aligned} \tag{3.33}$$

が得られる。そのとき，式（3．32）と式（3．33）から

$$\pi_u(l_0,\ l) \fallingdotseq \frac{-\frac{1}{2}pu''(\omega_1)\varepsilon^2}{pu'(\omega_1)+(1-p)u'(\omega_2)} \qquad (3.\ 34)$$

となる。

いま，2つの効用関数 $u_1=-e^{-ax}$, $u_2=-e^{-bx}$, $a>b>0$ を考えよう。これらの効用関数 u_1, u_2 に対応するリスク回避関数 r_1 と r_2 の間には，

$$r_1 = -\frac{u''_1}{u'_1} = a > b = -\frac{u''_2}{u'_2} = r_2$$

なる関係がある。したがって，定理3.2から

$$\pi_1(x,\ l) > \pi_2(x,\ l)$$

となる。一方，もし $\omega_1-\omega_2$ が充分に大きいならば，

$$-\frac{u''_1(\omega_1)}{u'_1(\omega_2)} = ae^{a(\omega_2-\omega_1)} < be^{b(\omega_2-\omega_1)} = -\frac{u''_2(\omega_1)}{u'_2(\omega_2)}$$

となり，さらに p が充分に小さいならば，そのとき式（3．34）から

$$\pi_{u_2}(l_0,\ l) > \pi_{u_1}(l_0,\ l) \qquad (3.\ 35)$$

が得られる。

リスク回避関数の議論からはリスク的初期条件のもとでも $\pi_{u_1}(l_0,\ l) > \pi_{u_2}(l_0,\ l)$ が期待されるべきであるのに反して，式（3．35）が成立する。この結果は我々の直感に合致しないとS. A. Ross は言う。

そこで，彼は，初期条件がリスク的であるときにも，意思決定者のリスク回避の程度を比較できるような，より強いリスク回避の議論を展開した。以下では，Rossのリスク回避の定義とそれに関連した諸結果を述べておこう。ただし，効用関数 u は実数直線上で定義され，$u'>0$, $u''<0$ と仮定されている。

定義3.1（Rossのリスク回避）．効用関数 u_1 が効用関数 u_2 より強くリスク回避である（記号的には，$u_1 \supsetsim u_2$）ための必要充分条件は，全ての x, y に対して

$$\frac{u_1''(x)}{u_2''(x)} \geq \lambda \geq \frac{u_1'(y)}{u_2'(y)}$$

なる，あるλが存在することである。

この定義のもとでは，もし$u_1 \underset{\sim}{\supset} u_2$であるならば，そのときPrattの意味で，$u_1$は$u_2$よりリスク回避的である，すなわち

$$\frac{u_1''(x)}{u_2''(x)} \geq \frac{u_1'(x)}{u_2'(x)}$$

ならば，$u_1' > 0,\ u_2' > 0,\ u_1'' < 0,\ u_2'' < 0$ から，

$$r_1(x) = -\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} \geq -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} = r_2(x)$$

となる。したがって定義3.1が成立すれば，定理3.2の条件1が成立することに注意されたい。

定理3.4 (Ross). つぎの3つの条件は同値である：

(1)　全てのx，yとある$\lambda > 0$に対して

$$\frac{u_1''(x)}{u_2''(x)} \geq \lambda \geq \frac{u_1'(y)}{u_2'(y)}$$

(2)　$G' \leq 0,\ G'' \leq 0,\ u_1 = \lambda u_2 + G$なるような$\lambda > 0$とある関数$G$が存在する。

(3)　全ての"くじ" l_0，lに対して，"くじ" l_0が所与であるとき，$E(l) = 0$ すなわち $E(l | l_0) = 0$

かつ

$$u_1(l_0 * l) = u_1[l_0 * \{-\pi_1(l_0,\ l)\}]$$

かつ

$$u_2(l_0 * l) = u_2[l_0 * \{-\pi_2(l_0,\ l)\}]$$

は

$$\pi_1(l_0,\ l) \geq \pi_2(l_0,\ l)$$

を意味する。

（証明） Ross (1981)。

例3　いま，$x>0$

$$u_1(x)=x-e^{-x}$$

$$u_2(x)=x-be^{-x},\ 1>b>0,$$

としよう。そのとき$\lambda=1/b$とおくならば

$$\frac{u_1''(x)}{u_2''(x)}=\frac{1}{b}=\lambda>\frac{u_1'(y)}{u_2'(y)}=\frac{1+e^{-y}}{1+be^{-y}}$$

となり，$u_1 \supsetsim u_2$ となる。

註：Rossの例題ならびに定理3．4にみられるように，Rossの議論では初期条件l_0と選択対象lが必ずしも確率的に独立である必要はない。一方，第4章における我々の議論では，簡単化のために初期条件l_0と選択対象lは確率的に独立であると仮定されている。

初期条件がリスク的であるために，Rossにおける逓減リスク回避性は，Prattの場合と異なり，つぎのようになる。

定義3．2（Rossの逓減リスク回避）．効用関数uが逓減リスク回避的であるための必要充分条件は

任意のxと$y>0$に対して

$$u(x) \supsetsim u(x+y)$$

が成立することである。

この定義3．2は定義3．1において$u_1=u(x)$，$u_2=u(x+y)$とおくことによって得られ，Prattの逓減リスク回避の定義より強いことに注目されたい。すなわち，定義3．2より，

$$\frac{u''(x)}{u''(x+y)} \geq \lambda \geq \frac{u'(x)}{u'(x+y)}$$

であり，$u'>0$, $u''<0$ であるゆえに，

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \geq -\frac{u''(x+y)}{u'(x+y)} = r(x+y)$$

となる。このように，Rossの逓減リスク回避性は r が x の減少関数であることを意味している。

例4　いま，

$$u(x) = x - e^{-ax},\ a > 0$$

としよう。この効用関数 $u(x)$ は Ross の意味での逓減リスク的である。 なぜならば，$y>0$ に対して

$$\frac{u'(x)}{u'(x+y)} = \frac{1+a\,e^{-ax}}{1+a\,e^{-a(x+y)}} < e^{ay},$$

$$\frac{u''(x)}{u''(x+y)} = \frac{-a^2 e^{-ax}}{-a^2 e^{-a(x+y)}} = e^{ay}$$

であるゆえに，固定した y に対して $\lambda = e^{ay}$ とおくならば，

$$\frac{u''(x)}{u''(x+y)} = e^{ay} = \lambda > \frac{u'(x)}{u'(x+y)}$$

となり，定義3．1より $u(x) \supsetsim u(x+y)$ となる。

なお，Machina（1982, a）は，現実の世界が完全な確実性を提供することはまれであるという点から，“Rossの定式化は現実性の方向への一歩であるが，それはまだ非現実的な側面，すなわち，初期条件に対する増分が非確率的であるという条件を有している”と言う。それゆえに，逓減リスク回避に対する直感では，初期条件のリスク的増分 $l_\Delta = (p\cdot x_1, (1-p)\cdot x_2)$, x_1, $x_2 > 0$, $1 > p > 0$ に対しても，$\pi(l_0, l) > \pi(l_0 * l_\Delta, l)$ が成立すべきであると彼は主張する。ここで，“くじ” $l_0 * l_\Delta$ は “くじ” l_0 より不利な結果をもたら

さないことに注意されたい。しかしながら，Machinaは，リスク的増分による，“より一般的な逓減リスク回避”を期待効用理論の枠組の外で（すなわち期待効用の公理系を認めないところで）議論している。また，選択対象 l と初期条件 l_0 が確率的に独立である場合，$V(x)=u(x*l_0)$，$x\in X$ と定義される関数 V における逓減リスク回避，すなわち，$r'(x)=\{-V''(x)/V'(x)\}'<0$ のとき，リスク・プレミアム $\pi(l_0, l)$ が x の減少関数であることはKihlstrom-Romer-Willams （1981）によって示されている。

註：Ross のリスク回避性の議論は，一見，妥当であるようにみえる。しかしながら，期待効用定理が存在を保証している効用関数はリスク的初期条件においても適用されうるかどうかという問題がある。この点に関する検討は，Ross（1981）では，なされていない。また，Kihlstrom-Romer-Williams（1981）の議論においても，同様に，この問題の重要性が見落されている。期待効用理論にリスク的初期条件を導入することには「形式的にも」障害はないという“一般的認識”があるようにみえる。事実，Ross，Kihlstrom-Romer-Williamsらがリスク的初期条件を考慮に入れていることは「現実への第一歩」であるばかりでなく，この“一般的認識”が存在することの証拠でもある。我々は，第4章以降で，リスク的初期条件においては効用関数の存在が必ずしも保証されないという結論を導きだすであろう。

第４章　期待効用理論の妥当性

1. は じ め に

期待効用理論を妥当と考えている意思決定者が，リスク的初期条件のもとで，リスク的な選択対象の集合からどれかを選ばなければならないとしょう。そのとき，どのような問題が生じるかを考察してみよう。

意思決定者がリスク的初期条件 l_0を有しているとき，リスク的選択対象 l_i（$i=1$，２，・・・）の順位づけには，“たたみこみ” $l_0 * l_i$ ，すなわち，多重くじによる期待効用が算定されるべきであると考えることはごく自然な見解である。しかしながら，期待効用定理の定式化，すなわち，初期条件なしでの期待効用と多重くじでの期待効用は必ずしも同じでないことが判明する。多重くじでの期待効用の算定には，リスク的初期条件は既知であることが要求されている。一方，期待効用定理の定式化では初期条件が既知であることは必要でない。そのとき，意思決定者はどちらの算定方式に従って期待効用を導くべきか。期待効用の概念では，たとえ初期条件がリスク的であるとしても，そのような事実を考慮に入れる必要性はないと言われるかもしれない。この主張は正当であろうか。

意思決定者の効用関数 u が既知であると仮定されるならば，上述のような疑問点が生じる。そこで，多重くじの視点から期待効用とは何であったのかということを振り返ってみよう。

“くじ” l の期待効用は，式（２．５）から

$$u\ (l) = E\ (u,\ l) = \sum_{i=1}^{r} p_i\, u\,(x_i)$$

と定義されている。すなわち，期待効用は確実な結果の集合 X 上で意味をもつ。一方，多重くじ $l_0 * l_i$（$i=1$，２，・・・）のこの形の集合には，初期条

件 l_0という迷惑な付属物のために確実な結果の集合 X は含まれていない。そのとき，意思決定者にとって期待効用はどのようなものになるのか。

さらに，初期条件 l_0がリスク的であることから，選択対象の効用はどのような点を原点として測定されるのか。その原点は“くじ” l_0 の確実等価額 $x^*(l_0)$ であるのか。初期条件 l_0が確実等価額 $x^*(l_0)$ に置き換えられるとき，多重くじの相互依存性が存在するにもかかわらず，期待効用は論理一貫した選好行動を意思決定者に保証しうるのか。

本章では，上に示した幾つかの疑問に導く原因として，多重くじの可換半群性と多重くじの相互依存性の 2 つが指摘される。さらに，この 2 つの事実から，期待効用理論の妥当性に連なる期待効用の定義と効用評価のための原点に関する問題が議論される。

2 節では，後の分析に必要な多重くじに関する基礎的な知識が与えられる。2 − 1 節で多重くじは可換半群であることが指摘され，2 − 2 節で多重くじにおけるリスク・プレミアムと確実等価額の間に存在する基本的関係が考察される。

3 − 1 節では，多重くじの相互依存性が例題によって解説される。3 − 2 節では，たとえ初期条件において無差別であったとしても，初期条件がたたみこまれた形式での“くじ”の期待効用は初期条件の型によって異なることが示される。さらに，逓減リスク回避的な効用関数では，リスク・プレミアムが大であるような初期条件はそうでない初期条件よりも大きな期待効用を与えることを指摘しよう。

4 − 1 節では，初期条件がリスク的であるとき，可換半群の性質から確実な結果の効用を決定することは困難となり，期待効用の定義に問題が生じることを指摘しよう。4 − 2 節では，初期条件がリスク的であるとき，効用評価のための原点は存在しないことが示される。

なお，本章の内容は期待効用理論に対する批判的検討を本書で展開していく

上での核であり，Fukuba-Ito (1980) における主要部分の解説である。また，この論文の改訂版であるFukuba-Ito (1984) を参照されたい。

2. 多重くじの基本構造

2－1　多重くじの可換半群性

さて，結果の集合Xは金額を示す数値によって定義されているとしよう。そして“くじ”の集合Ωは集合Xの上で定義されている。第3章4－2節「リスク回避関数」では，“たたみこみ”と呼ばれる演算$*$が簡単に説明された。これを形式的に書くと，$l_1=(\beta\cdot x_3,(1-\beta)\cdot x_4)$，$1>\beta>0$であるとき，

$$\omega * l_1=\{\beta\cdot(\omega+x_3),(1-\beta)\cdot(\omega+x_4)\} \qquad (4.1)$$

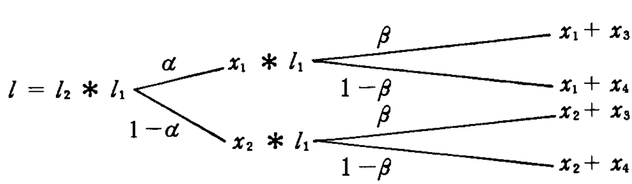
となる。

いま，確実な金額ωではなく，確率的なもの，すなわち“くじ”$l_2=(\alpha\cdot x_1,(1-\alpha)\cdot x_2)$，$1>\alpha>0$を考えよう。例えば，意思決定者が初期資産$l_2$を有するとしよう。そのとき，式（4．1）はつぎのように変わる。ただし確率αとβに対応する事象は**確率的に独立**であるとしよう。

$$\begin{aligned} l &= l_2 * l_1 \\ &= (\alpha\cdot x_1,(1-\alpha)\cdot x_2) * (\beta\cdot x_3,(1-\beta)\cdot x_4) \\ &= \{\alpha\cdot(x_1 * l_1),(1-\alpha)\cdot(x_2 * l_1)\} \\ &= \{\alpha\beta\cdot(x_1+x_3),\alpha(1-\beta)\cdot(x_1+x_4),(1-\alpha) \\ &\qquad \beta\cdot(x_2+x_3),(1-\alpha)(1-\beta)\cdot(x_2+x_4)\} \qquad (4.2) \end{aligned}$$

となる（図4－1参照）。

図　4－1



このように，“**たたみこみ**”$*$を拡張することにしよう。そのとき，$\alpha\beta+\alpha(1-\beta)+(1-\alpha)\beta+(1-\alpha)(1-\beta)=1$であるから$l$は“くじ”となり，“くじ”$l=l_2*l_1$は多重くじ（multiple lottery）と呼ばれる。このとき，集合Ωは演算$*$のもとで“**閉じている**（closed）”と言われる。なお，退化した“くじ”l_xあるいはxも集合Ωの要素であることを指摘しておこう。

全てのl_1，l_2，$l_3\in\Omega$に対して

$$(l_1*l_2)*l_3=l_1*(l_2*l_3)$$

が成立する。この性質は演算$*$に関する**結合法則**と言われる。

全てのl_1，$l_2\in\Omega$に対して

$$l_1*l_2=l_2*l_1$$

が成立する。このとき演算$*$に関して**可換法則**が成立すると言われる。

そして，式（4．1）において$\omega=0$ならば，全ての$l_1\in\Omega$に対して

$$0*l_1=l_1*0=l_1 \tag{4.3}$$

が成立する。$\omega=0$は集合Ωの**単位元**と呼ばれる。しかしながら，全ての退化していない“くじ”$l\in\Omega$に対して

$$l*l_1=l_1*l=0$$

となるような**逆元**l_1は集合Ωの中には存在しない。

集合Ωが演算$*$に関して“閉じており”，結合法則が成立するとき，代数（Ω，$*$）は半群と呼ばれる。もし単位元が存在し，全ての元に対して逆元が存在すれば，半群は群となる。半群において可換法則が成立するとき，（Ω，$*$）は**可換半群**と呼ばれる。このように，多重くじの集合Ωは群になりえない可換半群として特徴づけられる。

註：集合Ωは“くじ”の集合であるが，演算$*$が考慮に入れられるとき，それは多重くじの集合と呼ばれていることに注意されたい。

2－2　基本的関係

本節では，

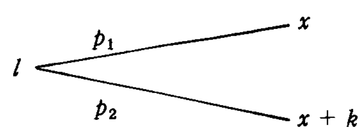
$$l=(p_1\cdot x\ ,\ p_2\cdot(x+k)),\ \ x\ ,\ k\in X\ ,\ k>0\ ,$$
$$p_1\ ,\ p_2\in(0\ ,\ 1)\ ,\ \ p_1+p_2=1$$

なるタイプの“くじ”を考察することにしよう。以下の議論の目的にとってはそれで充分であることがやがて分るであろう。いま，確実等価額$x^*(l)$を

$$x^*(l)=\phi(l)$$

と置こう。そのとき，“くじ”$l=(p_1\cdot x\ ,\ p_2\cdot(x+k))$において，

図　4－2



p_1，p_2，kが固定されているならば，$\phi(l)$はxの関数と考えられるので，

$$\phi(l)=\phi(x)$$

と表現することにしよう。そのとき，同様に，リスク・プレミアム$\pi(l)$は

$$\pi(l)=\pi(x)$$

としよう。そして効用関数uは$u'>0$とする。

また，$u(\phi(x))=p_1u(x)+p_2u(x+k)$であるから，$u$の性質と陰関数定理により，逆関数$u^{-1}$を使って，確実等価額$\phi(x)$は

$$\phi(x)=u^{-1}[p_1u(x)+p_2u(x+k)] \tag{4.4}$$

と書くことができる。

さて，リスク回避的な効用関数uを持っている意思決定者を考えよう。そのとき，

$$\begin{aligned}\pi(l)&=E(l)-\phi(l)\\&=x+p_2k-\phi(x)>0\end{aligned} \tag{4.5}$$

が得られる。つぎに，我々は

$$\pi_s(x)+\pi(x)=p_2 k \tag{4.6}$$

なる関数π_sを定義する。そのとき,

$$\pi_s(x)=\phi(x)-x$$

となる。逆関数の微分を使うことによって,

$$\pi_s'(x)=\phi'(x)-1$$

$$=\frac{1}{u'(\phi(x))}\{p_1 u'(x)+p_2 u'(x+k)\}-1$$

が得られる。

ここで,$\pi_s'(x)=0$と$\pi_s'(x)>0$の2つの場合を考えよう;

ケースa.$\pi_s'(x)=0 \Longleftrightarrow \phi'(x)=1 \Longleftrightarrow$

$$p_1 u'(x)+p_2 u'(x+k)=u'(\phi(x)) \tag{4.7}$$

ケースb.$\pi_s'(x)>0 \Longleftrightarrow \phi'(x)>1 \Longleftrightarrow$

$$p_1 u'(x)+p_2 u'(x+k)>u'(\phi(x)) \tag{4.8}$$

ケースa,すなわち,$\pi_s'(x)=0$は効用関数uが**一定リスク回避的**であることを意味する。なぜならば,$\omega * l=(p_1\cdot(\omega+x),\ p_2\cdot(\omega+x+k))$であるゆえに,$x$の増加は$\omega$の増加であると考えられる。さらに,式(4.6)から$-\pi_s'(x)=\pi'(x)=0$となる。また,ケースb,すなわち,$\pi_s'(x)>0$では,同じような推論から$-\pi_s'(x)=\pi'(x)<0$となり,効用関数uは**逓減リスク回避的**である。

いま,我々は多重くじの分析に必要な基本的関係を導出する。

“くじ” l_1, l_2が

$l_1=(p_1\cdot x,\ p_2\cdot(x+k))$, x, $k\in X$, $k>0$, $p_1+p_2=1$,

p_1, $p_2\in(0,1)$

$l_2=(q_1\cdot x,\ q_2\cdot(x+h))$, x, $h\in X$, $h>0$, $q_1+q_2=1$,

q_1, $q_2\in(0,1)$

であるとき,2つの“くじ” L_1, L_2,すなわち,

$$L_1 = \omega * l_1$$
$$L_2 = \omega * l_2$$

を考えよう。そのとき，式（4．5）から

$$\begin{aligned} E(l_1) - x &= \pi(l_1) + \phi(l_1) - x \\ &= (E(l_1) + \omega) - (x + \omega) \\ &= \pi(L_1) + \phi(L_1) - (x + \omega) \end{aligned}$$

となり，

$$\phi(L_1) = \phi(l_1) + \omega + \pi(l_1) - \pi(L_1) \qquad (4.9)$$

が得られる。同様に

$$\phi(L_2) = \phi(l_2) + \omega + \pi(l_2) - \pi(L_2) \qquad (4.10)$$

が得られる。

もし意思決定者が $L_2 \succ L_1$ を示すならば，確実等価額 $\phi(L_1)$，$\phi(L_2)$ に対して $\phi(L_2) > \phi(L_1)$ でなければならない。したがって，$L_2 \succ L_1$ ならば，

$$\phi(l_2) + \pi(l_2) - \pi(L_2) > \phi(l_1) - \pi(l_1) - \pi(L_2)$$

となり，その逆も真となる。

また，もし意思決定者が**一定リスク回避的**，すなわち，$\pi_s'(x) = 0$ であるならば，$\pi(l_1) - \pi(L_1) = 0$ となり，式（4．9）から“くじ” L_1 の確実等価額 $\phi(L_1)$ は

$$\phi(L_1) = \phi(l_1) + \omega \qquad (4.11)$$

が得られる。すなわち，$\pi_s'(x) = 0$ では l_1の確実等価額 $x^*(\omega, l_1)$ は，全ての$\omega \in X$に対して $x^*(\omega, l_1) = \phi(l_1)$ である。したがって，ω と l_1 は相互依存的ではない。

しかしながら，意思決定者が**逓減リスク回避的**，すなわち，$\pi_s'(x) > 0$ であるならば，l_1 の確実等価額 $x^*(\omega, l_1)$ は，式（4．9）から，

$$\begin{aligned} x^*(\omega, l_1) &= \phi(L_1) - \omega \\ &= \phi(l_1) + \pi(l_1) - \pi(L_1) \end{aligned}$$

となり，$\omega>0$ では $\pi(l_1)-\pi(L_1)>0$ であるから，$x^*(\omega\ ,\ l_1)\neq\phi(l_1)$ である。それゆえに ω と l_1 は相互依存的となる。このケースは多重くじの**相互依存性**における最も単純な例の一つである。この場合，いままで，しばしば，述べてきたように，確実な金額 ω は“くじ” $l_\omega=(1\cdot\omega)$ とみなされることから，“くじ” l_ω と“くじ” l_1 が相互依存していると言う意味で，ω と l_1 は多重くじの相互依存関係にある。

3. 多重くじの相互依存性

3－1　相互依存と選好 ―― 例

分析に入る前に，我々が多重くじの相互依存性をなぜ重視するかという点についての理解を深めるために，興味ある例を挙げよう。

いま，期待効用理論を妥当と考えている意思決定者が居るとしよう。そして，彼の効用関数は $u(x)=\log x$ であると仮定しよう。したがって，第3章4－3節，例1で示したように，$u(x)$ は逓減リスク回避関数をもつ，すなわち，$\pi_s'(x)>0$ である。

意思決定者は初期資産 $\omega=100$ をもっている。そして，彼はこの $\omega=100$ を“くじ” $l_1=(\frac{1}{2}\cdot 80\ ,\ \frac{1}{2}\cdot 122)$ と交換することができるとしよう。$\omega=100$ と $l_1=(\frac{1}{2}\cdot 80\ ,\ \frac{1}{2}\cdot 122)$ を効用関数 $u(x)=\log x$ で評価すると

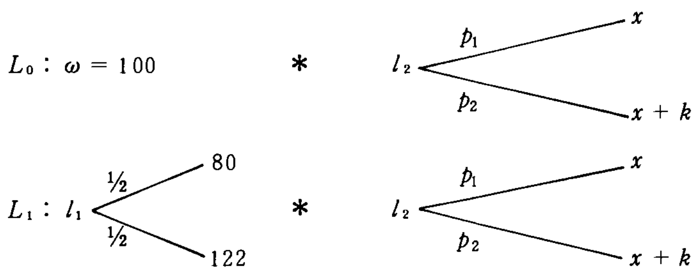
$$u(\omega)=\log 100=4.605\ ,$$

$$u(l_1)=\frac{1}{2}\log 80+\frac{1}{2}\log 122=4.593$$

である。

さらに，彼は確率と結果のいずれも未知の“くじ” $l_2=(p_1\cdot x\ ,\ p_2\cdot(x+k))$ を引き受けなければならないものと仮定する。ただし，p_1，x，k は未知とする。

図　4—3



そして，意思決定者は

$$L_0 = \omega * l_2 \text{と} L_1 = l_1 * l_2$$

のどちらかを選好しなければならないものとする。

直観的に言って，“くじ” l_2 は L_0，L_1 のどちらにも含まれており，$u(\omega) = 4.605$，$u(l_1) = 4.593$ であるから，意思決定者は $L_0 \succ L_1$ を示すようにみえる。しかしながら，“くじ” l_2 の p_1，x，k が未知であるならば，期待効用理論を信じる意思決定者は“くじ” L_0，L_1 の選好順序を決めることができない。

なぜならば，(1)もし $x = 60$，$x + k = 200$，$p_1 = 0.3$，$p_2 = 0.7$ であるならば，$u(L_0) = 5.51527$，$u(L_1) = 5.5151$ となり，

$$L_0 \succ L_1$$

が生じる。

(2)もし $x = 60$，$x + k = 400$，$p_1 = 0.3$，$p_2 = 0.7$ であるならば，$u(L_0) = 5.8728$，$u(L_1) = 5.8729$ となり，

$$L_1 \succ L_0$$

が生じる。

この例題は，意思決定者が初期資産 ω を“くじ” l_1 なる形式のポートフォリオに変えることができるものと解釈される。したがって，これはポートフォリオの選択問題と考えられるが，いま述べたように期待効用理論ではこの問題

は解決されない。この結論が生じる原因は初期資産 ω，ポートフォリオ l_1 と"くじ" l_2 の間にある相互依存性である。

ここで注意されたいことは，$u(\omega) > u(l_1)$ であるにもかかわらず，$u(L_1) > u(L_0)$ が生じることである。この現象を解明する一つの鍵はリスク・プレミアムにあるようにみえる，すなわち，$x = 60$，$x + k = 200$ では，$\pi(l_2) = 18.631$ であり，$x = 60$，$x + k = 400$ では，$\pi(l_2) = 71.59$ である。多重くじにおけるリスク・プレミアムの役割は，のちに与える定理4．1，定理4．2によって明きらかになるだろう。

3－2　相互依存性の分析

つぎの2つの"くじ" l_0，l_1 を考えよう；

$$L_0 = \omega * l_2$$

$$L_1 = l_1 * l_2 \qquad (4.12)$$

ただし，$l_1 = (p_1 \cdot x,\ p_2 \cdot (x + k))$，$l_2 = (q_1 \cdot y_1,\ q_2 \cdot y_2)$，$p_1 + p_2 = 1$，$q_1 + q_2 = 1$，$p_1$，$p_2$，$q_1$，$q_2 \in (0, 1)$，$y_1$，$y_2$，$k > 0$ としよう。さらに，$\omega = \phi(l_1)$ と仮定しよう。

そのとき，意思決定者が逓減リスク回避的であるとき，すなわち，$\pi_s'(x) > 0$ であるとき，式（4．12）によって与えられた"くじ" L_0，L_1 に対して，$u(L_1) > u(L_0)$ であることが示される。

"くじ" L_0，L_1 を効用関数 u で評価すると，

$$u(L_0) = q_1 u(\omega + y_1) + q_2 u(\omega + y_2) \qquad (4.13)$$

式（4．2）から

$$\begin{aligned} u(L_1) &= u(l_1 * l_2) \\ &= u\{p_1 q_1 \cdot (x + y_1),\ p_1 q_2 \cdot (x + y_2),\ p_2 q_1 \cdot (x + k + y_1),\ p_2 q_2 \cdot (x + k + y_2)\} \\ &= q_1 \{p_1 u(x + y_1) + p_2 u(x + k + y_1)\} \\ &\quad + q_2 \{p_1 u(x + y_2) + p_2 u(x + k + y_2)\} \qquad (4.14) \end{aligned}$$

が得られる。

他方，$\pi_s'(x)>0$ は $\pi_s(x)=\phi(x)-x$ が単調増加であることを意味している。したがって，

$$y_i>0 \text{ に対して } \pi_s(x+y_i)>\pi_s(x)$$

となり，式（4．4）から

$$\pi_s(x+y_i)=u^{-1}[p_1u(x+y_i)+p_2u(x+y_i+k)]-(x+y_i)$$

$$\pi_s(x)=u^{-1}[p_1u(x)+p_2u(x+k)]-x$$

となる。すなわち，

$$u^{-1}[p_1u(x+y_i)+p_2u(x+k+y_i)]>\phi(x)+y_i \qquad (4.15)$$

となる。式（4．15）を書き換えると，

$$p_1u(x+y_i)+p_2u(x+k+y_i)>u(\phi(x)+y_i) \qquad (4.16)$$

図　4－4

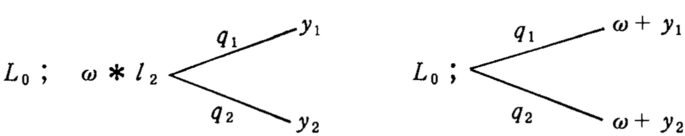
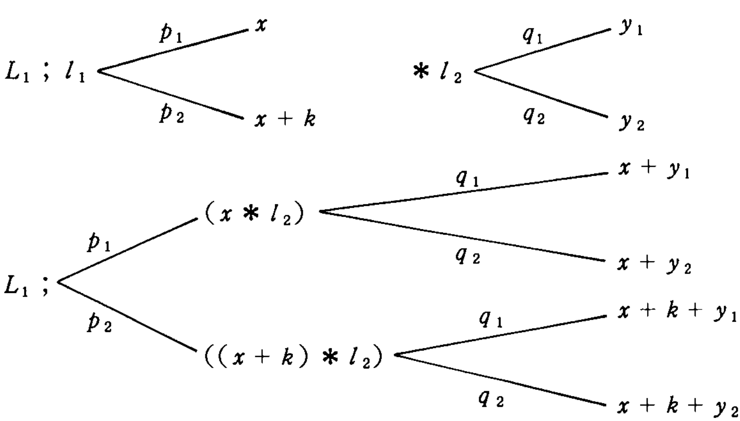


図　4－5



が得られる。

そして，$\phi(x)=\phi(l_1)=\omega$を考慮し，式（4．16）において，$i=1$，$i=2$を代入した不等式を使うことによって，式（4．13）と式（4．14）から

$$u(L_1)>u(L_0)$$

が生じる。

さらに，式（4．16）から，$\omega>0$に対して

$$q_1 u(y_1+\omega)+q_2 u(y_2+\omega)>u(\phi(l_2)+\omega)$$

である。そこで，$\omega=\phi(l_1)>0$とおくと

$$\begin{aligned} u(L_0)&=q_1 u(y_1+\omega)+q_2 u(y_2+\omega)\\ &>u(\phi(l_2)+\phi(l_1)) \end{aligned} \qquad (4.17)$$

が得られる。

一方，意思決定者が一定リスク回避的である，すなわち，$\pi_s'(x)=0$ であるならば，

$$p_1 u(x+y_i)+p_2 u(x+k+y_i)=u(\phi(x)+y_i) \qquad (4.18)$$

が得られる。これは，$\phi(l_1 * y_i)=\phi(l_1)+y_i$ であるから，式（4．11）と同じ内容であり，Pfanzagl の**一貫性公理**（consistency axiom）と呼ばれている（Pfanzagl，1959；Borch，1968）。そこで，式（4．18）を式（4．14）に代入すると，

$$u(L_1)=q_1 u(\phi(x)+y_1)+q_2 u(\phi(x)+y_2)$$

となる。$\phi(x)=\phi(l_1)=\omega$を考慮し，さらに，式（4．18）を適用すると

$$\begin{aligned} u(L_1)&=u(\phi(l_1)+\phi(l_2))\\ &=u(L_0) \end{aligned} \qquad (4.19)$$

が得られる。

以上の議論を定理として整理しておこう。

定理４．１．

k，y_1，$y_2 > 0$，p_1，p_2，q_1，$q_2 \in (0, 1)$，$p_1 + p_2 = 1$，$q_1 + q_2 = 1$，

$$l_1 = (p_1 \cdot x,\ p_2 \cdot (x + k)),$$
$$l_2 = (q_1 \cdot y_1,\ q_2 \cdot y_2),$$
$$\phi(l_1) = \omega$$

とし，さらに

$$L_0 = \omega * l_2,$$
$$L_1 = l_1 * l_2 \qquad (4.20)$$

としよう；

（１）もし $\pi_s'(x) = 0$ ならば，$u(L_1) = u(L_0)$ が成立する。

（２）もし $\pi_s'(x) > 0$ ならば，$u(L_1) > u(L_0)$ が成立する。

例１　$\pi_s'(x) > 0$ のケース

$u(x) = \log x$，$p_1 = p_2 = ½$，$x = 50$，$x + k = 200$，

$q_1 = ⅓$，$q_2 = ⅔$，$y_1 = 100$，$y_2 = 300$，$\omega = 100$ としよう。そのとき，第３章４－３節，例１で示したように効用関数 $u(x) = \log x$ は逓減リスク回避的，すなわち，$\pi_s'(x) > 0$ である。そのとき，

$$u(l_1) = ½\log 50 + ½\log 200$$
$$= 4.60517$$
$$\phi(l_1) = 100$$
$$= \omega$$

となる。一方，

$$u(L_0) = ⅓\log(100 + 100) + ⅔\log(100 + 300)$$
$$= 5.7604198$$
$$u(L_1) = ⅓\{½\log(50 + 100) + ½\log(200 + 100)\}$$
$$+ ⅔\{½\log(50 + 300) + ½\log(200 + 300)\}$$

$= 5.809899$

となり，

$$u\ (L_1) > u\ (L_0)$$

が成立する。

さて，

$$l_1 = (p_1 \cdot x_1,\ p_2 \cdot x_2),\ x_1 > x_2,$$

$$L_0 = l_1 * l_2,$$

$$L_1 = l_1 * l_3,$$

$$\phi\ (l_2) = \phi\ (l_3)$$

としよう。そのとき，式（4．2）を考慮すると

$$\begin{aligned} u\ (L_0) &= u\ (l_1 * l_2) \\ &= u\ (p_1 \cdot x_1 * l_2,\ p_2 \cdot x_2 * l_2) \\ &= p_1 u\ (x_1 * l_2) + p_2 u\ (x_2 * l_2) \end{aligned}$$

$$u\ (L_1) = p_1 u\ (x_1 * l_3) + p_2 u\ (x_2 * l_3)$$

となる。したがって，$u\ (x * l_2)$ と $u\ (x * l_3)$ の大小関係が全ての x に対して判明すれば，$u\ (L_0)$，$u\ (L_1)$ に関する大小関係が導出される。

以下に示される定理４．２はある条件が満たされるとき，$L_1 = \omega * l_1$，$L_2 = \omega * l_2$ に関して選好関係が定められることを示している。

定理４．２．

$$l_1 = (p_1 \cdot x,\ p_2 \cdot (x + k)),$$

$$l_2 = (p_1 \cdot y,\ p_2 \cdot (y + h)),$$

$$p_1,\ p_2 \in (0,\ 1),\ p_1 + p_2 = 1,\ \omega,\ h,\ k > 0,$$

$$L_1 = \omega * l_1,$$

$$L_2 = \omega * l_2,$$

とする。そして，全ての $x \in (\alpha,\ \infty)$ に対して $\pi_s' > 0$ であるとする。

さらに，ある $x^+ \geq \alpha$ において，全ての x，$y \in (x^+, \infty)$ 対して

$$\phi''(x)<0 \text{かつ} \psi''(y)<0 \tag{4.21}$$

かつ

$$\phi(l_1)=\phi(l_2), \text{かつ} \pi(l_2)>\pi(l_1) \tag{4.22}$$

ただし，$\phi(x)=\phi(l_1)$，$\psi(y)=\phi(l_2)$，と仮定する。

そのとき，全ての $\omega>0$ に対して

$$\phi(L_2)>\phi(L_1) \tag{4.23}$$

が成立する。

（証明）　付録3，参照。**（証終）**

註：定理4．2において，$\psi(y)=\phi(l_2)$とおいている理由は$\phi(l_2)$が$\phi(l_1)=\phi(x)$と異なる関数であることを明示するためである。なお，式（4．22）が成立しているとき，“くじ” l_1と“くじ” l_2の相違は**平均効用維持的リスク増加**（mean utility preserving increase in risk）と言われている（Diamond-Stiglitz，1974）。また“くじ” l_2 は“くじ” l_1と**単純補償スプレッド**（a simple compensated spread）だけ異なるとも言われている（Machina，1982）。

例2　$u(x)=\log x$，$x=189.071$，$x+k=210$，$y=165.437$，$y+h=240$，$p_1=p_2=½$，$\omega=100$としよう。そのとき，

$$\begin{aligned} u(l_1) &= p_1 u(x)+p_2 u(x+k) \\ &= ½\log 189.071+½\log 210 \\ &= 5.294615, \\ u(l_2) &= 5.294615, \\ \phi(l_1) &= \phi(l_2)=199.261, \\ \pi(l_1) &= E(l_1)-\phi(l_1), \\ &= 0.2745, \end{aligned}$$

$$\pi\ (l_2) = 3.4575,$$

$$u\ (L_1) = p_1\, u\ (\omega + x) + p_2\, u\ (\omega + x + k)$$

$$= ½ \log 289.071 + ½ \log 310$$

$$= 5.7016,$$

$$u\ (L_2) = 5.70516,$$

$$\phi\ (L_1) = 299.346,$$

$$\phi\ (L_2) = 300.415,$$

$$\phi\ (L_2) > \phi\ (L_1)$$

となる。また,

$$\pi\ (L_1) = 0.1895$$

$$\pi\ (L_2) = 2.3025$$

である。

定理４．１，定理４．２が設定しているような状況（病的ではなく，ごく正常と判断される状況）では，より大きいリスク・プレミアムは多重くじにより大きい効用を与えている。言い換えると，期待効用理論は意思決定者が安定した“くじ”よりもよりリスク的な“くじ”を選好することを要請している。

4. 期待効用理論の難点

4－1　リスク的初期条件と期待効用の定義

意思決定者の初期資産は必ずしも確実な金額 ω ではなく，一般的にはリスク的であると考えられる。いま，そのリスク的初期資産は“くじ” l_0 であり，意思決定者の選択対象の集合は“くじ”の集合 Ω であるとしよう。期待効用定理では，初期資産（すなわち，一般的に言えば，初期条件）に関する言及が全くなしに，status quo における効用関数 u の存在が保証されている。

ここで

$$l_0 * \Omega = \{\ l_0 * l \mid l \in \Omega\ ,\text{固定された}\ l_0 \in \Omega\ \}$$

と定義しておこう。そのとき $l_0 * \Omega \subset \Omega$ となる。

つぎに，２つの表現（A），(B）を考えよう；

表現（A）．初期条件 l_0 を有する意思決定者の選択対象の集合は Ω である。

表現（B）．意思決定者の選択対象の集合は $l_0 * \Omega$ である。

表現（A）に関して言えば，意思決定者が，たとえリスク的初期条件 l_0 を持っていたとしても，集合 Ω に対して期待効用の公理系と一貫した選好をするならば，期待効用定理によって効用関数の存在が証明されている。一方，表現（B）では意思決定者にとって選択可能な集合は集合 Ω ではなく，集合 Ω の部分集合である $l_0 * \Omega$ となる。そのとき，意思決定者が期待効用で評価しなければならない対象は $l_0 * l$（$l \in \Omega$）という形式の多重くじであろう。したがって，効用関数は $l_0 * \Omega$ の上で定義される必要がある。そのとき，期待効用は存在するのか，以下で，これを議論しよう。

この部分集合 $l_0 * \Omega$ を第３章２節における期待効用の公理系に適用しよう；

全ての l_1，l_2，$l_3 \in l_0 * \Omega$ に対して

公理１．弱順序：集合 $l_0 * \Omega$ の上で定義された選好関係 $\succsim$ は弱順序である。

公理２．連続性：もし $l_1 \succ l_2 \succ l_3$ であるならば

$$l_2 \sim \alpha^* \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha^*) \cdot l_3$$

であるような $\alpha^* \in (0, 1)$ がただ一つ存在する。

公理３．代替性：もし $l_1 \sim l_2$ であるならば，そのとき全ての $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_3 \sim \alpha \cdot l_2 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_3$$

である。

さらに，$l_0 * \Omega$ は混合集合の条件Ｍ１，Ｍ２，Ｍ３，Ｍ４を満たすことは，容易に検証される。

このように，もし Ω に対して公理系の成立が認められるならば，$l_0 * \Omega$ に対しても公理系の成立は認められなければならない。したがって，全ての l_1，

$l_2 \in l_0 * \Omega$と全ての$\alpha \in [0, 1]$に対して

$$u(l_1) > u(l_2) \Longleftrightarrow l_1 \succ l_2$$

かつ

$$u(\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2) = \alpha u(l_1) + (1-\alpha) u(l_2)$$

なる線型効用関数uは存在する。

しかしながら，前に述べたように，線型効用は必ずしも期待効用でない（第2章5－1節「線型効用関数と期待効用」，参照）。すなわち，線型効用を期待効用に拡張するためには，確実な結果$x_i \in X$を確率1で与えるような“くじ”l_{x_i}が必要とされた。しかし，意思決定者にとって意味のある，選択可能な“くじ”の集合$l_0 * \Omega$には，結果x_iを確実に与えるような“くじ”l_{x_i}は存在しない。

すなわち，いかなるx_iに対しても$l_0 * l = l_{x_i}$となるような“くじ”lはΩには存在しない。これは$l_0 * l_0^{-1} = 0$となるような逆元l_0^{-1}が存在しないことに象徴されている。もし逆元l_0^{-1}が存在すれば，$l_0 * (l_0^{-1} * x_i) = l_{x_i}$となる。そして$l_0^{-1} * x_i \in \Omega$であるから，$l_{x_i} \in l_0 * \Omega$が生じる。

逆元l_0^{-1}が存在しない例を示そう。リスク的初期条件を$l_0 = (p_1 \cdot x_1, p_2 \cdot x_2)$としよう。“くじ”$l_0$がリスク的であることは$x_1 \neq x_2$かつ$p_1, p_2 \in (0, 1)$であることを意味する。そのとき，$l_0 * l_0^{-1} = (p_1 \cdot x_1 * l_0^{-1}, p_2 \cdot x_2 * l_0^{-1})$となる。もし$x_1 * l_0^{-1} = 0$かつ$x_2 * l_0^{-1} = 0$なる$l_0^{-1}$が存在すれば，$l_0 * l_0^{-1} = 0$となるが，明らかなようにそのような“くじ”$l_0^{-1}$は存在しない。

これは多重くじの集合$l_0 * \Omega$と“たたみこみ”演算$*$からなる代数$(l_0 * \Omega, *)$が可換半群であるが群ではないという性質から生じる結論である。さらに付記すれば，集合$l_0 * \Omega$には，“くじ”l_{x_i}が存在しないことから，単位元の役割を果す元0も存在しない。したがって，表現（B）では測定の原点として0をとることはできない。一方，表現（A）における集合Ωには式（4．

3）で示されているように単位元0が存在する。

したがって，リスク的初期条件を有する意思決定者は“くじ” $l \in l_0 * \Omega$ に関する選好関係を結果 $x \in X$ の選好関係によって定義することが不可能となる。このように，集合 $l_0 * \Omega$ 上で定義された効用関数からは，期待効用定理が文字どおり指すところの効用の期待値が導入されない。すなわち，集合 $l_0 * \Omega$ 上では期待効用は定義されえない。

註：結果 $x \in X$ を確実に与える“くじ” l_x の集合 Ω_x を

$$\Omega_x = \{ l_x \mid l_x = (1 \cdot x), x \in X \}$$

と定義しよう。そして，期待効用が定義できるように，集合 $l_0 * \Omega \cup \Omega_x$ を考えよう。そのとき，$u(l) = E(u, l)$ と表現される関数 u が存在するようにみえる。しかしながら，集合 $l_0 * \Omega \cup \Omega_x$ は混合集合の条件M1を満たさない。例えば，ある“くじ” $l = (\alpha \cdot l_{x_1}, (1-\alpha) \cdot l_{x_2}) = \alpha \cdot l_{x_1} \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_{x_2}$ では，l_{x_1}，$l_{x_2} \in \Omega_x$ であるゆえに，l_{x_1}，$l_{x_2} \in l_0 * \Omega \cup \Omega_x$ である。しかしながら，$l \notin l_0 * \Omega$ かつ $l \notin \Omega_x$ でありうるから，$l \notin l_0 * \Omega \cup \Omega_x$ となりうる。したがって，集合 $l_0 * \Omega \cup \Omega_x$ は期待効用定理の前提条件たる混合集合ではない。

4－2　評価のための原点

リスク的初期条件 l_0 を固定せず，全ての“くじ”を初期条件としうるような仮想的状況を考えよう。すなわち，意思決定者に全く関係がない対象に対して意思決定者は公理系を満たす選好を表示することが可能であるとしよう。そのとき，全ての多重くじも一つの“くじ”であるから，全ての l_0，$l \in \Omega$ に対して $l_0 * l \in \Omega$ となる。したがって，Ω の上で定義された効用関数 v は期待効用定理により存在する。

効用関数 v は全ての初期条件に対して定義されているが，意思決定者はある特定の初期条件 l_0 のもとで選好をする。それゆえに初期条件 l_0 は固定される。

そして，意思決定者が l_1，$l_2 \in \Omega$ を無差別としているとしよう。この無差別性は $l_0 * l_1 \sim l_0 * l_2$ を意味している。すなわち，

$$v(l_0 * l_1) = v(l_0 * l_2)$$

となる。

一方，期待効用定理では，status quo すなわち初期条件 l_0 において Ω の上で定義された効用関数 $u(\cdot \mid l_0)$ の存在が保証されている。

註：期待効用では初期条件 l_0 は表記されていないが，ここでは，便宜上，$u(\cdot \mid l_0)$ という形でそれを明記しておこう。

いま，効用関数 $u(\cdot \mid l_0)$ において，効用を評価するために，原点として $u(x_0 | l_0) = 0$ と定義される点 x_0 が少なくとも一つあると仮定しよう。ただし x_0 はある数値である。そのとき，期待効用の性質から

$$u(l_1 \mid l_0) = u(l_2 \mid l_0) = u(x^* \mid l_0)$$

となるような確実等価額 x^* が存在する。関数 $u(\cdot \mid l_0)$ が意思決定者の選好を表現しているためには，全ての $l \in \Omega$ に対して

$$u(l \mid l_0) = \delta v(l_0 * l) + r$$

が満足されなければならない，ただし，$\delta > 0$，r は実数である。

それゆえに，

$$v(x^* * l_0) = v(l_1 * l_0) = v(l_2 * l_0) \qquad (4.24)$$

となる。しかしながら，定理4．1が示すように，式（4．24）が成立するための条件は $\pi_s'(x) = 0$，すなわち，効用関数の一定リスク回避性である。もし意思決定者が逓減リスク回避的であるならば，式（4．24）は成立しない。

我々は点 x_0 を**効用評価のための原点**として採用したが，原点が他の任意の実

数に決められたとしても，上述の事情になんら変わるところはない。したがって，意思決定者が逓減リスク回避的であるならば，そのとき $u(\cdot \mid l_0)$ を評価するための原点は存在しない。すなわち，効用関数 $u(\cdot \mid l_0)$ は存在しないと言えることになる。

第５章　期待効用と初期条件についての再考

1. は じ め に

期待効用定理では，リスク的な選択対象のある集合に対して意思決定者が公理系を満たす選好を示すならば，その選好を表現する効用関数の存在が保証されている。したがって，期待効用定理の定式化では初期条件に特別の配慮を払うことなく，意思決定者がそのような選好を示すならば，そのとき効用関数が存在することになる。

一方，リスク回避関数の定式化では，効用は初期条件がたたみこまれた“くじ”の上で算定されなければならない。もし期待効用理論が内的一貫性を有しているのであるならば，そのときリスク回避関数の定式化の場合と期待効用定理の定式化の場合における期待効用は選択対象の集合に同じ選好順位を付与しなければならない。しかしながら，初期条件がリスク的であるとき，それらは必ずしも同じ選好順位を生みださないことが判明するだろう。

また，初期条件がリスク的である場合は期待効用理論の考察対象外であると言われるかもしれない。そのような主張の理由がなにであろうとも，もしそうであれば，期待効用理論が応用される範囲は極度に限定されなければならないし，現在，世間でもてはやされているほどには現実の分析能力を有していないことになるだろう。事実はそうであるようにみえる。本章では，期待効用論者によって初期条件がどのように取扱われているかを考察し，リスク的初期条件では期待効用定理の定式化，すなわち，多くの文献で使用されている増分型による分析がどのような問題点を含んでいるかを吟味しよう。また，期待効用の算定に困難を生ぜしめないような初期条件の確実性は，現実には，必ずしも保証されないこと，これを論証しよう。この論証の意図は，重要な意思決定問題

において，常にと言えるほど，初期条件がリスク的または不確実であること，ならびに，そのような問題においては初期条件を正確に認識することの必要性を強調することにある。

2－1節では，期待効用において初期条件がほとんど重視されていなかった事実を示し，2－2節では，リスク的初期条件における期待効用の増分型分析には2種類の定式化が見い出されるが，それらは同じ分析結果をもたらさないことを示そう。2－3節では，増分型分析と初期条件型分析における齟齬を指摘しよう。なお，第4章におけると同様に初期条件と選択対象は確率的に独立であると仮定しておく。

3－1節では，第3章3－1節の例題を使って初期条件を正確に認識することの必要性を説明しよう。3－2節では，企業の初期資産を表示する会計報告の内容に不確実性が存在することを示し，企業の意思決定という重要な場において従来の期待効用の適用が問題を含むことを指摘しよう。3－3節では，会計報告よりもより限定された局面である再保険のケースでは，本質的に，初期条件がリスク的であることを指摘し，再保険の効用モデルの一例をとりあげ，初期条件がどのように処理されているかを示そう。

2. 期待効用における初期条件の認識

2－1 初期条件の経緯

期待効用において初期条件を無視することができないという事実は，充分に，認識されていないようにみえる。例えば，Schneeweiss (1974) は，確率と効用における双対性から，条件付確率に対する類推として条件付効用を簡単に議論しているにすぎない；“・・・二つの結果e_1とe_2が一つの結果｛e_1とe_2｝，記号的には｛e_1+e_2｝を生ぜしめるように結合されると仮定されることによって，結果の空間に関する構造は拡張されなければならない。例えば，e_iが消費される財の組であるならば，結合演算子＋はベクトル和であろう。さて，効用

関数 u が所与であるとき，所与の結果 e_0 に対して条件付効用関数は

$$u\,(e\,/\,e_0\,) = u\,(e + e_0\,) - u\,(e_0\,) \qquad (5\,.\,1)$$

と定義されるだろう。項 $-u\,(e_0\,)$ は本質的なものでなく，$u\,(0\,/\,e_0\,) = 0$ なることを保証するための慣習的な基準化としてつけ加えられている。・・・$u\,(e\,/\,e_0\,)$ は財の組 e_0 がもうすでに受け入れられているときにおける付加的な財の組 e の効用と理解される・・・”そして，彼は言う，条件付効用の概念はあまり多くの注意をひいていない，なぜならば，これは比較的ささいな事柄であるからである。

しかしながら，事実はそうでない。効用関数の存在が仮定されたとしても，初期条件に，充分，慎重な考慮がはらわれていない評価方式は初期条件を直視した評価方式とは異なる結論をもたらす。

期待効用（あるいは moral expectation）そのものに関する研究において初期条件を意識的に考慮に入れた人には D. Bernoulli（1738）が挙げられる。その後，リスク回避理論では，主題の性質上，Arrow (1963, 1970)，Pratt (1964), Stiglitz (1969)，Yaari (1969)，Sandmo (1969)，Kihlstrom-Mirmann (1974), Paroush (1975)，Ross (1981)，Kihlstrom-Romer-Williams (1981) によって必然的に初期条件が導入された。その中で，Bernoulli，Arrow，Pratt Stiglitz，Kihlstrom-Mirmann，Paroush は確実な初期条件を基礎にして分析をなしている。そして，Yarri において始めてリスク的初期条件がてがけられており，第3章4－4節で述べたように，Ross にいたって，確実な初期条件のもとでのリスク回避関数による分析の不充分性から，リスク的初期条件におけるリスク回避の定義が Arrow，Pratt とは異った形式で提示されている。また，Kihlstrom-Romer-Williams はリスク回避関数に関しては，Arrow，Pratt の定義に類似な定義を使い，リスク的初期条件における問題を取り扱っている（第3章4－4節，参照）。そして，Sandmo も，確実な初期条件に対する，現実への適用についての疑念から，二時点的文脈（two period context）

によるリスク回避関数を示している。しかし，それは本質的には確実な初期条件にもとづくものと解釈される。

さて，初期条件 $l_0 \in \Omega$ を有する意思決定者にとって“くじ” $l_1 \in \Omega$ と“くじ” $l_2 \in \Omega$ が無差別であるという状況を考えよう。そのとき，つぎの2つの表現が対応させられる；

表現Ⅰ： $l_1 \sim l_2$

表現Ⅱ： $l_0 * l_1 \sim l_0 * l_2$

そのとき，表現Ⅰは期待効用定理に登場し，表現Ⅱはリスク回避理論に登場する。表現Ⅰが表現Ⅱを意味し，表現Ⅱが表現Ⅰを意味するならば，問題はない。そして，期待効用定理では，表現Ⅰと表現Ⅱが同じことを意味するとの前提でも効用関数の存在が保証される。

期待効用定理が展開され始めた1940年代頃には，表現Ⅱに対してほとんど注意が払われていなかったようにみえる。例えば，Friedman-Savage (1948) の議論には一貫性の公理（第4章3－2節，参照）が必要であることを Pfanzagl (1959) は指摘した。この点に関して Pfanzagl の叙述をたどってみよう。

Friedman-Savage (1948, p. 290) はつぎのように言う，「“くじ” l の確実等価額 x^* が“くじ” l の期待金額 $\bar{x}$ よりも大であるならば，意思決定者は確実な金額 $\bar{x}$ よりもこの“くじ”を選好し，“くじ” l をもつために，高々，($x^* - \bar{x}$) を喜んで支払うだろう。もし x^* が $\bar{x}$ よりも小ならば，意思決定者は $\bar{x}$ を選好し，“くじ” l に対する保険料として，高々，($\bar{x} - x^*$) を喜んで支払うだろう。」

この Friedman-Savage の議論は $\bar{x}$ が“くじ” l の期待値 $E(l)$ である場合に限定されている。しかしながら，上述の彼らの議論が $\bar{x} = E(l)$ で成立しているならば，任意の金額 $\bar{x} = x$ に対しても成立することは明白である。それゆえに，Pfanzagl はこれをつぎのように言い換える；“もし x^* が x よりも大であるならば，意思決定者は確実な金額よりもこの“くじ” l を選好し，“く

じ” l をもつために，高々，(x^*-x) を喜んで支払うだろう。”

もし意思決定者が“くじ” l に対して金額 (x^*-x) を支払うならば，彼は，実際には，“くじ” $l*(x-x^*)$ をもっていることになる。そうすると，上記の Pfanzagl の言い換えから，この“くじ” $l*(x-x^*)$ の効用は金額 x の効用と等しくなる。すなわち，高々，金額 (x^*-x) を意思決定者は喜んで支払う。それゆえに，

$$u(l*(x-x^*)) \geq u(x)$$

となる。一方，意思決定者が (x^*-x) 以上の金額を支払うことはない。それゆえに，

$$u(x) \geq u(l*(x-x^*))$$

となり，両式から

$$u(l*(x-x^*)) = u(x) \qquad (5.2)$$

が得られる。

“くじ” l の確実等価額 $x^* = u^{-1}(u(l)) = \phi(l)$ としよう，すなわち，

$$u(x^*) = u(l) = u(\phi(l))$$

としよう。そのとき，式（５．２）は

$$x = \phi(l*(x-x^*))$$

を意味する，そして，$x-x^*=y$ とおき，$x^*=\phi(l)$ から

$$\begin{aligned} x &= x^* + y \\ &= \phi(l) + y \\ &= \phi(l*y) \end{aligned}$$

となる。したがって，

$$\phi(l*y) = \phi(l) + y \qquad (5.3)$$

が得られる。この関係式（５・３）は Pfanzagl の**一貫性の公理**（consistency axiom）と呼ばれ，式（４・11）と同値である。

このように，Friedman-Savage の前述の議論は一貫性の公理を前提としてい

る。

さらに，初期条件として確実な金額ωを有する意思決定者が２つの“くじ”l_1，l_2に関する選好を考慮している場を想定しよう。そのとき，

$$\omega * l_1 \sim \phi(\omega * l_1)$$
$$l_1 \sim \phi(l_1)$$
$$\omega * l_2 \sim \phi(\omega * l_2)$$
$$l_2 \sim \phi(l_2)$$

であるゆえに，式（５．３）が成立すれば，

$$\omega * l_1 \sim \omega * l_2$$

が成立するための必要充分条件は

$$l_1 \sim l_2$$

である。したがって，$l_0 = \omega$のとき，一貫性の公理が成立すれば，表現Ｉと表現Ⅱは同値である。

期待効用定理だけをみるかぎり，効用関数の存在を保証することそれが主たる目的である。期待効用定理の公理系が許容されるならば，数学的な証明の過程が生む論理的な結果として効用関数の存在は疑うことのできない事実である。実際，表現Ｉと表現Ⅱが同じ意味を有する形での効用関数uの存在は保証されている。

しかしながら，初期条件が$\omega \in X$であり，一貫性の公理が成立するならば，そのとき，存在が保証されている効用関数は特殊な形，すなわち，一定リスク回避形に限定されなければならないことが指摘された（Pfanzagl，1959)。そして，リスク回避理論の登場とともに，期待効用定理では暗黙的に表現Ⅱの意味での解釈も正当性を有しているとされているようにみえる（Pratt，1964)。それでも，なお期待効用定理での選好関係の表現形式は表現Ｉそのものを使用している。

註：一定リスク回避性が一貫性の公理を意味することは式（４．11）で示されている。そして，$l_0 = \omega$のとき，表現Ⅰと表現Ⅱの同値性が一貫性の公理から導きだされることは，いま，上で述べた。また，式（４．11）から，表現Ⅰと表現Ⅱの同値性は一定リスク回避性を意味する。したがって，一定リスク回避性，一貫性の公理，$l_0 = \omega$のときの表現Ⅰと表現Ⅱの同値性，これら３つの形式は全く同じ内容である。

２－２　増分型と初期条件

期待効用定理の定式化である表現Ⅰでは意思決定者の初期条件が明記されていないが，リスク回避関数の定式化によれば表現Ⅱの意味も期待効用定理にあるとされているようにみえる。この主旨から効用関数の表現形式をみるとき，Schneeweissの条件付効用$u(l/\omega)$は表現Ⅱに対応している。

$$u(l/\omega) = u(\omega * l) - u(\omega),\ l \in \Omega$$

あるいは

$$u(x/\omega) = u(\omega + x) - u(\omega),\ x,\ \omega \in X$$

一方，表現Ⅰに対応する効用関数$v(l)$は期待効用定理によって存在する。そのさい，初期条件ωは固定されているゆえに，効用関数$v(l)$に明記されていないようにみえる。表現Ⅰにおける選好関係は表現Ⅱにおけるそれと一貫していなければならない。さらに期待効用定理の付加条件として，効用関数は正の線型変換まで一意的である。

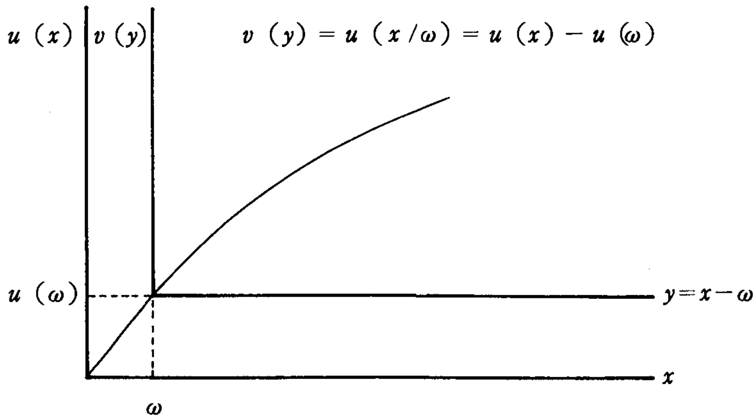
それゆえに，

$$u(x/\omega) = \delta v(x) + \gamma,\ \delta > 0$$

である。このことは条件付効用$u(x/\omega)$が効用$v(x)$と線型関係であること，すなわち，初期条件ωに依存しないことを示している。このような議論からみても，“くじ”lの効用は意思決定者の初期条件ω，あるいは，status quoからの増分として評価されうるようにみえる。この事情は図５－１として

示される。そのとき，関数v（y）は関数u（x）においてωを原点とした関数

図　5－1



である。この関数v（y）を**増分型**と呼ぼう。ただし，

$$v(y) = u(x) - u(\omega),\ y = x - \omega \qquad (5.4)$$

初期条件が確実な金額ωであるとき，増分型v（y）は式（5，4）で定義されたが，初期条件がリスク的になるとき，増分型vはどのようになるかを考えてみよう。以下に示すように二つのタイプが考えられる。

期待効用定理では，意思決定者が集合Ωに対して期待効用の公理系に従った選好をするならば，効用関数の存在が保証されている。これは，初期条件が確実的であれ，リスク的であれ，その事情に変りはないことを意味している。すなわち，期待効用定理には初期条件に対する言及がないということは任意の初期条件に対してこの定理が成立することを意味している。したがって，初期条件がリスク的であろうとも，表現Ⅰに対応する効用関数vは存在する。さらに，期待効用に関する文献では，この増分型がしばしば使われている。例えば，“金額に対するπ－無差別曲線，あるいは，効用曲線を描くとき，横軸があなたの現在の資産位置からの増分を表すものと約束した”とされている（Raiffa，1968，訳書，p.121）。したがって，初期条件，あるいは，初期資産$l_0 \in \Omega$に

対して，効用関数uによって，$u(l_0)=u(\omega)$となるような確実な金額ωが存在し，“くじ”$l\in\Omega$に対する評価は

$$v(l)=u(\omega*l)-u(\omega) \qquad (5.5)$$

なる形の関数vによってなされているようにみえる。

そして，この$v(l)$に対応する“くじ”lの確実等価額$x^*(\omega,l)$は

$$\begin{aligned} x^*(\omega,l) &= u^{-1}u(\omega*l)-u^{-1}u(\omega) \\ &= \phi(\omega*l)-\omega \qquad (5.6) \end{aligned}$$

となることに留意しておこう。したがって，$x^*(\omega,l)$は意思決定者の資産がωであるときの“くじ”lの確実等価額であり，すなわち，式（3.24）におけるそれと同じであり，$\phi(\omega*l)$は資産が0であるときの“くじ”$\omega*l$の確実等価額である。言い換えると，

$$v(l)=v(x^*(\omega,l))$$

$$u(\omega*l)=u(\phi(\omega*l))$$

である。

式（5.5）は期待効用のもとでは不当な解釈ではない。なぜならば，“くじ”l_0の売値たる確実等価額$\phi(l_0)=\omega$は期待効用のもとで，“くじ”l_0が評価された唯一の値になるからである。また，“くじ”l_0が市場価格で評価されるべきであるとしても（Morrison，1967），意思決定者は売値以下の価格では取引をしない。したがって，“くじ”l_0の売値ω以外の値が意思決定者の評価値にはなりえない。

さらに，もし意思決定者が有している初期条件l_0をωと評価することが正当でないならば，そのとき増分型においても初期条件の形式に関する表現が必然的に存在しなければならない。逆に，もし選択対象lに関する評価が初期条件に依存することを認めるとされるならば，そのとき増分型の効用関数vが初期条件を含んでいないことは選択対象の評価が不可能であることを意味する。このように，期待効用定理には初期条件に対する明示的表現がないゆえに，“く

じ” l の効用は初期条件 l_0 の効用 $u(l_0)$ に等しい効用 $u(\omega)$ に対する増分と考えられているようにみえる。

なお，Schneeweiss による条件付効用の表現式（５．１），$u(e/e_0)$ では条件 e_0 が効用関数に含まれているゆえに，いま述べた解釈には異論があるかもしれない。しかしながら，前述のように，条件付効用は比較的ささいな事柄であると Schneeweiss は言う。この陳述から判断するとき，多くの期待効用の研究者が，Schneeweiss を含めて，条件付効用を増分型と代替させることによって解決されると解釈しているとみる見解は妥当であろう。

一方，前述の Schneeweiss の表現を翻訳すれば，効用 $u(l_0 * l)$ を平行移動させることによって，すなわち，$v(0)=0$ となるような変換によって，“くじ” l に対する評価がなされる。Schneeweiss がその重要性を見落している点，すなわち，選択対象 l の評価が初期条件の形式 l_0 に依存すること，その視点から増分型を，式（５．１）の類推に従って定義しよう；

$$u(l/l_0)=u(l_0 * l)-u(l_0) \tag{5.7}$$

ただし $u(l_0 * l)$ は存在すると仮定しておく。

また，“くじ” l に対応する，条件付増分 $u(l/l_0)$ の確実等価額を $x^*(l/l_0)$ で記すとき，それは式（５．６）と同様に，

$$\begin{aligned} x^*(l/l_0) &= u^{-1}\{u(l_0 * l)\}-u^{-1}u(l_0) \\ &= \phi(l_0 * l)-\phi(l_0) \end{aligned} \tag{5.8}$$

となることに留意しておこう。

註：このタイプの増分型の分析に関して Hildreth (1974) を参照されたい。

このようにリスク的初期条件においては式（５．５）と式（５．７）によって定義される二種類の増分型が考えられる。

そのとき，確実等価額 $x^*(\omega, l)$ と $x^*(l/l_0)$ は等しいだろうか。いま，

$x^*(\omega, l) = x^*(l/l_0)$としよう。式（５．６），（５．８）から，$\phi(l_0) = \omega$を考慮するとき，

$$\phi(l_0 * l) = \phi(\omega * l) \qquad (5.9)$$

が生じる。定理４．１によれば，式（５．９）が成立するためには，意思決定者は一定リスク回避的でなければならなかった。もし彼が逓減リスク回避的であるならば，そのとき式（５．９）は成立しない。これは前述のように多重くじの**相互依存性**の結果である。

さらに，選択対象の評価方式として式（５．５）と式（５．７）は選好順序の決定に関しても同じではない。すなわち，“くじ” $l_1, l_2 \in \Omega$に対して式（５．５）では$v(l_1) > v(l_2)$であったとしても，式（５．７）では$u(l_2/l_0) > u(l_1/l_0)$になる可能性がある（伊藤，1982）。例えば，

$$u(x) = \log x, \qquad l_0 = (\tfrac{1}{2}\cdot 50, \tfrac{1}{2}\cdot 200),$$

$$\omega = \phi(l_0) = 100, \qquad l_1 = (\tfrac{1}{3}\cdot 100, \tfrac{2}{3}\cdot 300),$$

$$l_2 = (1\cdot 217, 0\cdot 0)$$

としよう。そのとき

$$\begin{aligned} v(l_1) - v(l_2) &= u(\omega * l_1) - u(\omega * l_2) \\ &= 5.7604198 - 5.7589 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。一方

$$\begin{aligned} u(l_2/l_0) - u(l_1/l_0) &= u(l_0 * l_2) - u(l_0 * l_1) \\ &= 5.81017 - 5.809899 \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。

このように，式（５．５）で定義された増分型の評価が与える選好順序と式（５．７）で定義された条件付増分型の評価が与える選好順序は必ずしも同じでないことが判明する。式（５．７）は“現在の資産位置からの増分”を条件

付効用の視点からより忠実に表現したものにすぎない。

したがって，リスク回避理論の焦点である最終的資産状況でなく，選択対象の評価を期待効用定理が意図しているとしても，初期条件の形式，例えば，具体的な“くじ”あるいは確実な金額などが既知でないとき，効用関数は意思決定者の選好からもたらされる順位づけとは一貫しない評価を与えるかもしれない。

2－3　初期条件型と増分型

前節では，選択対象の評価手続として“現在の資産位置からの増分を表わす”ような効用関数がとりあげられ，その定義のもとで初期条件が選択対象の順位づけにいかに影響するかが検討された。本節では，そのような評価手続における確実同値額の妥当性を問題にしよう。

リスク回避理論に沿った線の視点から言えば，選択対象 $l \in \Omega$ を評価するにさいして初期条件 l_0 と対象 l の“たたきこみ” $l_0 * l$ で定義された資産の最終的状況が選好の規準である。このタイプの評価方式を**初期条件型**と呼ぼう。初期条件型と増分型の相違は前者が最終的資産状況だけに関連するのに反して，後者は選択対象 $l \in \Omega$ だけの評価を狙っているという点である。

初期条件 l_0 における増分型，式（5．7）をとりあげよう，そのとき，選択対象 l に対する確実等価額は式（5．8）で表現されることが述べられた。一方，初期条件型では，選択対象 l に対応する確実等価額 $x^*(l_0, l)$ に初期条件 l_0 をくみこんだ形 $x^*(l_0, l) * l_0$ の効用は“くじ” $l_0 * l$ の効用と同じでなければならない（確実等価額のこの定式化については Kihlstrom-Romer-Williams, 1981, 参照)。すなわち，初期条件型のもとでは，$x^*(l_0, l)$ はつぎの式をみたす；

$$u(l_0 * l) = u(l_0 * x^*(l_0, l)) \tag{5.10}$$

さて，$r^* = x^*(l_0, l)$ とおき，式（5．10）から

$$\phi(l_0 * l) = \phi(l_0 * r^*),$$

となり，式（２．８）から，

$$E(l_0 * l)-\pi(l_0 * l)=E(l_0 * r^*)-\pi(l_0 * r^*)$$

となる。そのとき$E(l_0 * r^*)=E(l_0)+r^*$, $E(l_0 * l)=E(l_0)+E(l)$であることを考慮すると，

$$E(l)-\pi(l_0 * l)+\pi(r^* * l_0)=r^* \qquad (5.11)$$

が生じる。

一方，式（５．８）から

$$\begin{aligned} x^*(l / l_0) &= \phi(l_0 * l)-\phi(l_0) \\ &= E(l_0 * l)-\pi(l_0 * l)-\{E(l_0)-\pi(l_0)\} \\ &= E(l)-\pi(l_0 * l)+\pi(l_0) \qquad (5.12) \end{aligned}$$

となる。そのとき，初期条件型における$x^*(l_0, l)=r^*$と増分型における$x^*(l / l_0)$が無条件に等しいかどうかを検討しよう。

いま，

$$r^*=x^*(l_0, l)=x^*(l / l_0)$$

と仮定しよう。式（５．11）と式（５．12）から

$$r^*-x^*(l / l_0)=\pi(r^* * l_0)-\pi(l_0) \qquad (5.13)$$

が得られる。

このr^*がゼロでなく，初期条件l_0がリスク的であるとき，式（３．21）から$\pi(r^* * l_0)=\pi(r^*, l_0)$なることに注目すれば，式（５．13）の右辺がゼロであるためには，効用関数uは一定リスク回避的でなければならない。このように，初期条件l_0がリスク的であり，かつ，効用関数uが一定リスク回避的でないならば，そのとき増分型における確実等価額$x^*(l / l_0)$と初期条件型におけるそれ$x^*(l_0, l)$が一致する保証はない。

言い換えると，初期条件型すなわち表現Ⅱにもとづく評価方式の視点からは増分型における確実等価額の表現が不適切であると言える。

このように，期待効用の分析では，三種類の定式化，すなわち，式（5．5），（5．7），（5．10）が使われているが，たとえリスク的初期条件における効用関数の存在が仮定されたとしても，それらには論理一貫性が存在しない。

また，初期条件l_0が確実な金額を確率1で与える“くじ”，すなわち，確実な金額であるとき，リスク・プレミアムは

$$\pi\ (r^* * l_0) = \pi\ (l_0) = 0$$

となるゆえに，増分型，初期条件型のいずれで評価しても，“くじ” lの確実等価額は同じとなる。

3. 初期条件の不確実性

3－1　初期条件の確定の問題

期待効用定理の導出に際しては初期条件が考慮に入れられていないことは，しばしば，述べられてきた。しかし期待効用の解釈において，選択対象の選好関係が初期条件に依存すべきであると考える人々はいる。

例えば，“D.Bernoulli の偉大な貢献は，プロスペクトのある集合から選択する機会を提供された場合，金持と貧乏人が同じような決定をすることはないであろうこと，そして決定すべきでもないことを，かれが指摘した点にあった。いいかえれば，プロスペクトの集合についての選好順序は，一般に，意思決定者の富に依存せざるをえないということなのである（Borch, 1968, 訳書, p. 71)。”また，“効用が付与されなければならないものは最終的資産（final assets)であって，損得にではない。・・・なんとならば，これらは結果（consequences）ではなく，結果間の差だけを記述している（Lindley, 1971, p. 71)。”

しかしながら，前節の議論から理解されるように，初期条件が確実な金額である限り，増分型の分析は初期条件型と矛盾しない。したがって，最終的資産であれ，損得であれ，効用の算定に関しては問題はない。最終的資産の効用を

算定することによって分析が進められているならば，意思決定者は初期条件を正確に確定しなければならない。そのとき，それが不可能であるならば，増分型の期待効用による分析は可能である。すなわち，期待効用定理では，初期条件が確実な金額であるならば，初期条件を知ることなしに選択対象の期待効用を算定することは可能である。

しかしながら，前節でみたように，困難な問題は，初期条件がリスク的であるとき，増分型の効用が初期条件型のそれと必ずしも一致しないことである。さらに，もし意思決定者が逓減リスク回避的であり，かつ，初期条件はリスク的ではあるが意思決定者にとって未知であるならば，そのとき彼は期待効用による選好をなしえないだろう。

例えば，第4章3－1節「相互依存と選好　—　例」における“くじ”をとりあげ，つぎのように解釈してみよう。意思決定者の効用関数は$u(x)=\log x$，すなわち，逓減リスク回避的であるとしよう。初期条件l_0は確率と結果，ともに未知の“くじ”$l_0=(p_1\cdot x\ ,\ p_2\cdot(x+k))$であるとしよう。
もし意思決定者が

$$\omega=100$$

$$l_1=\left(\frac{1}{2}\cdot 80\ ,\ \frac{1}{2}\cdot 122\right)$$

のどちらかを選好しなければならないならば，

$$L_0=l_0 * \omega$$

$$L_1=l_0 * l_1$$

の選好を決めることと同じ状況に彼はいる。

もし$x=60$，$x+k=200$，$p_1=0.3$，$p_2=0.7$であるならば，

$$u(L_0)>u(L_1)$$

となる。一方，$x=60$，$x+k=400$，$p_1=0.3$，$p_2=0.7$であるならば，

$$u(L_1)>u(L_0)$$

となる。

このように，初期条件 l_0 が未確定であるならば，意思決定者は期待効用によって“くじ” l_1 と ω のどちらを選好すべきかを決定することができなくなる。意思決定問題を期待効用によって分析することが有効であるためには，初期条件の確定化は重要なプロセスであると考えられる。

現実の重要な問題において，初期条件が確実でないと考えるべきケースは数多くあると想定されるが，以下では企業の初期条件と再保険の２つの例を挙げよう。

3－2　会計報告の場合

企業の意思決定における重要な問題，例えば，ある事業の廃止，企業の命運をかけるような設備投資，企業の合併，合同では企業の現状，すなわち，初期条件を正確に把握する必要がある。一方，ルーチン（routine）化された問題，例えば，事務作業に必要な文房具の購入では企業の初期条件を吟味することなど不必要であろう。

期待効用が有力な分析手段であるためには，後者のレベルの問題よりもむしろ前者のレベルにおける問題に対してそれは適用可能であるべきである。しかしながら，**企業の初期条件**を確定することは，原則的に，かなり困難であるようにみえる。この点に関して Fukuba-Miyamoto の議論をみてみよう（Fukuba -Miyamoto , 1981）。

彼らは，まず，つぎの２つの仮定を掲げる；

（a）管理会計の視点から合理的な意思決定者による重要な決定は初期条件を基礎にしてなされるべきである。

（b）意思決定の時点における初期条件は測定可能である。

これらの仮定のもとで，意思決定者が重要な決定問題に直面しているとき初期条件は，高々，リスク的であると主張されている。以下，企業の初期条件のリスク性に関して Fukuba-Miyamoto が示すいくつかの原因を展開しよう。

さて，ＸＹＺなる企業がとりあげられ，その企業のある時点における貸借対照表の項目がつぎの表のように示されている。

貸　借　対　照　表

１９８Ｘ年

資産の部		負債の部	
A Ⅰ	流動資産	L Ⅰ	流動負債
	(1) 現金預金		(1) 短期借入金
	(2) 受取手形		(2) 支払手形
	(3) 受取勘定		(3) 支払勘定
	貸倒引当金		(4) 負債引当金
	(4) 有価証券		(5) その他の負債
	(5) 棚卸資産	L Ⅱ	固定負債
	(6) その他流動資産		(1) 負債性引当金
A Ⅱ	固定資産		(2) 特定引当金
	(1) 有形固定資産	C	資　本
	減価償却引当金		(1) 資本金
	(2) 土　地		(2) 資本剰余金
	(3) 無形固定資産		(3) 利益剰余金
	(4) 投　資		(4) その他引当金
	引当金		(5) 当期未処分利益
A Ⅲ	繰延資金		

いま，Eは純資産（net assets）すなわち初期条件であり，Aは資産であり，Lは負債であり，Cは資本であるとしよう。そのとき，企業の初期条件Eは

$$E = A - L \qquad (5.14)$$

によって定義される。この式（５．14）は資本等式と呼ばれる。そして，貸借

対照表より

$$E=C$$

が成立する。資本等式（5．14）から，初期条件Eは資産Aと負債Lの評価額に依存する。そのとき，資産Aと負債Lの評価額はつぎに挙げるいくつかの理由によって，不確実，良くとも，リスク的になると言えるだろう。

(1) インフレーションの影響：会計では，貨幣価値は時間の経過に関係なく一定と仮定されている。そして，この仮定にもとづいて評価額の算定は歴史的原価によってなされる。そのとき，インフレーションによって有形固定資産と土地は必然的に過小評価される。ときには，有価証券，棚卸資産についても同じことが言えるだろう。極端に言えば，現金預金でさえ購買力の低下によって減価する（Colson-Zeleny ,1980 , p. 1）。仮に物価指数的な修正がなされたとしても，上記の資産項目の修正額は偏りを有し，正確な値を表わしていないだろう（横山　保，1960，Ⅲ部３．１節「所得効果と物価指数」）。

(2) 会計手続の採用の問題：財務諸表は“一般に公正妥当と認められた会計原則（generally accepted accounting principles)”すなわちＧＡＡＰに従って作成される。このＧＡＡＰは棚卸資産の評価に関してFifo（first in first out，先入先出），Lifo（last in first out，後入先出）などいくつかの方法を認めており，有形固定資産の評価に関しても定額法，定率法などいくつかの方法を認めている。これらの方法のどれを採用するかによって上記の資産項目の評価額は大きく変わる。

(3) 会計担当者の予測と判断：受取手形，受取勘定のための貸倒引当金や有形固定資産のための減価償却引当金を決定する問題がある。そのような問題では，会計担当者は貸倒見積額や固定資産の耐用年数を予測しなければならない。そのような予測の基礎には確率が必要とされる。さらに，製品の変化，生産方法の改善，新技術の開発などによる固定資産の陳腐化のために，耐用年数の確率分布を推定することは概して困難である。また，有価証券，棚卸資産では市

場価格と歴史的原価に差異がある。そのとき，この差異をどのように処理するかは会計担当者の判断あるいは態度に依存している。

(4)　投資の評価：投資は関連会社に投入した金額，すなわち，歴史的原価で計上されている。関連会社が未上場の企業であるとき，その企業はどのようにして評価されるのか，純資産が企業の評価額として計上されるかもしれない。そのとき，純資産の評価はＸＹＺ会社の純資産の評価と同じような問題をもつ。また，企業評価論における収益価値法，中位価値法などは将来の利益をくみこんでいる（小野　二郎，1973，p. 162，参照）。このように，投資の評価にはリスク的要因や不確実な要因が含まれている。

(5)　資産項目についての上記の議論は負債項目についても同様に適用されうる。

以上の議論から理解されるように，会計報告にある情報を詳細に検討するとき，ＸＹＺ会社の初期条件Eが不確実であり，良くともリスク的であると意思決定者は判断するだろう。

3－3　再保険の場合

保険業者は，大数の法則（the law of large numbers）が有効であるようにするために，同質の保険をできるだけ数多く集めることが必要とされる。この要件が満たされないとき，保険業者は一つの災害によって過大な損害を被るかもしれない。したがって，保険業者はこのような状態を避けなければならない。さもなくば，保険業者の危険が大きく，その業者の財務的な基礎が不安定になるだろう。巨大な損害は一人の保険加入者に支払われる金額が大きすぎることや，一つの大きな災害によって多くの保険加入者に保険金が支払われることによって生じる。

保険業者が安全に処理しうる最大の損害額は保有（retention）と呼ばれている。この保有は保険業者の経営規模，財務的状態，経営方針，問題となってい

る保険の性質(生命保険，火災保険，自動車保険など)等，種々の要因によって定まる。保有を高くすればするほど，保険業者はそれだけより大きいリスクにさらされることになる。一方，保有を低くすればするほど，保険業者は保険料から利益を得る機会をそれだけ失うことになる。

もちろん，保険業者はその保有を越える金額に対して保険契約を拒否することができる。例えば，自動車保険で，対人賠償は1億円以内，搭乗者傷害は3,000万円以内，対物賠償は5,000万円以内とすることにより，保有を越える支払金を拒絶するような保険契約は作成されうる。

しかしながら，保有を越える保険契約を拒否することは適切な処理方法であると言えないだろう。もし保険契約の一部だけが拒絶されたり，一部だけが受け入れられたりするならば，保険加入者はそのことに対して不快感を示し，場合によっては，保険契約そのものを結ばないかもしれない。したがって，普通，保険業者は保有を越える契約に対しては保険責任額の一部を他の保険業者との保険契約として処理する。この過程が**再保険**（reinsurance)と呼ばれている。

再保険の方法には，割合保険（quota share)，超過再保険（surplus share)，超過損害再保険（excess loss)，異常再保険（catastrophe)などいくつかがある；(1) 割合保険では，1億円の保険に対してその割合が五分五分であれば，保険業者と再保険業が損害に対してそれの2分の1を各々が支払う。(2) 超過再保険では，もし5,000万円が保険業者の保有であれば，1億円の契約では，5,000万円が再保険として処理される。もし損害額が8,000万円であるならば，再保険業者は損害額の8分の3を支払う。(3) 超過損害再保険では，ある保有，例えば5,000万円，を越えるような損害額8,000万円が生じたとき，再保険業者は3,000万のあるパーセンテージを支払う。(4) 異常再保険では一つの異常な災害により，保有，例えば5,000万円，を越えた損害額2億5,000万円が生じたとき，再保険業者は2億円の一部を支払うことになる（Williams-Heins，1976）。

保険業者はいくつかの保険契約をかかえているゆえに，**再保険行為**をなすことは業者が所有する全ての保険契約の一部を再保険しその残部を保留していることになる。この残部は保険業者の初期条件とみなされるべきものである。したがって，保険契約を除く業者の資産が確実的であると仮定されても，再保険行為はリスク的な初期条件のもとでなされていることは事実である。

しかるに，つぎのような割合再保険のモデルがみいだされる（Borch,1974)；

u：保険業者の効用関数，

ω：保険業者の初期資産（確実な金額），

$\tilde{X}$：リスクあるいは確率変数，

$F(x)$：リスク$\tilde{X}$の確率分布，$F(x)=P_r(\tilde{X}\leq x)$，

p：純保険料，$p=\int_0^\infty x\,dF(x)$

としよう。そして，保険業者は保険契約のk％だけ再保険すると仮定しよう。

そのとき，保険業者は純保険料kpを支払わなければならない。さらに，再保険業者の利益，再保険に必要な経費などの負荷要因λkpも支払わなければならない。保険業者に残るリスクの割合は（$1-k$）となる。そこで，

$$\int_0^\infty u\{\omega-(1+\lambda)kp-(1-k)x\}\,dF(x)$$

なる式を最大にするkの値が最適再保険の割合とされている。

このモデルが再保険のそれとして不適切であることは初期資産を確実な金額であると仮定していることから容易に理解されるであろう。なお，第3章4－4節におけるRossの例も参照されたい。

第6章　効　用　の　測　定

1.　は　じ　め　に

普通，大きく分けて2つの視点，すなわち，記述的視点と規範的視点から期待効用が解釈されていることは第2章6節で述べられた。記述的視点では，期待効用は意思決定者の実際の行動を説明または予測することが意図されている。規範的視点では，期待効用は意思決定者の実際の行動において指針として役立つことが意図されている。

現実の行動を予測するためには，まず，意思決定者がどのような行動原理に従っているかが知られていなければならない。記述的視点の期待効用におけるこの原理では意思決定者が期待効用を最大にするように行動すると主張する。これは期待効用仮説と言われる。つぎに，リスクに対する意思決定者の態度が導き出されなければならない。これは所与の状況においてある意思決定者の選好表現を通してなされる。そして，このプロセスには確実な結果の集合上で定義された効用の測定が含まれる。

一方，規範的期待効用の目的として，指針を含め，第1章で掲げた，つぎの3つの項目：

1. 合理的指針。
2. 複雑な選択対象に選好順位をつけること。
3. 最適化問題のアルゴリズムを適用すること。

を達成するには，特定の状況における特定の意思決定者の効用が必要とされる。

このように，いずれの視点においても効用の測定は欠くことのできない要素となっている。そして，この測定は意思決定者の，多分に，移り気な(erratic)選好に基づいて進められなければならない。すなわち，規範的視点のための効

用といえども，それの測定は記述的視点が問題とする現実の行動を観測することによってなされなければならない。

本章では，現実の意思決定と深く係わる効用測定の問題を検討しよう。この問題は記述的視点ならびに規範的視点の期待効用が現実の証拠からどの程度まで弁明されるかという検証性に関連している。

2節では，期待効用定理と期待効用仮説の相違に焦点をあわし，期待効用仮説の意味が議論される。また，測定の一般的な議論から効用の測定可能性について考察しよう。

3－1節では，効用測定手続の簡単な分類，定量的制約，定性的制約について解説がなされる。3－2節では，効用測定手続の中で最も簡明な手続，すなわち，半々くじにより，確実等価額を算定し，定量的制約が決定される手順が解説される。3－3節では，定量的制約のもとでの効用関数の推定とそれにともなう一般的な困難が議論される。

4節では，初期条件がリスク的であるとき，前節の効用測定手続，すなわち，数多くの文献で使われている測定手続には第4章4－2節の結論から導かれる論理的困難が存在することを指摘しよう。ただし一定リスク回避の場合には困難が生じない（伊藤，1986）。

2. 期待効用仮説と効用の測定

リスクを含む選択対象の選好に関して意思決定者はあたかも期待効用を最大化しているかのごとく行動するという仮説，これは**期待効用仮説**と呼ばれている。期待効用仮説をたてる主な目的は意思決定者の行動をその仮説によって予測することである。その際に注意すべき点はまだ観測されていない行動が仮説によって予測できるかどうかということである。

一見して矛盾を生みそうにない仮説は行動の予測に有効ではあるが，それそのものから興味ある事実あるいは意外性のある事実は引き出されないであろう。

それゆえに，有力な仮説は人にそれが真であるかどうかを疑わせるようなものでなければならない。すなわち，有力な仮説は原則的に反論を受けるような内容でなければならない（Friedman-Savage，1952，p. 465）。

そのような仮説が現実に照らし合わされたとき，予測された行動と現実の行動が，しばしば，明確に，相違しているならば，その仮説は誤りとされるだろう。一方，仮説が数多くの異るケースで，しばしば，正確な予測をなしうるならば，それは，増々，有力な仮説とされるだろう。

そのとき，行動の予測可能性を重視しすぎる結果，期待効用仮説が他の仮説よりも高い予測精度をもつということを強調することになるかもしれない。そして，公理と仮定された計算機構は，特別に，重要視されることなく，公理の記述的有効性（descriptive validity）よりも，むしろ仮説の予測能力だけが仮説の意義を決めるとされるかもしれない（Schoemaker，1982）。

しかしながら，期待効用仮説論者は現実の行動を記述する能力よりも，他の点を強調しているようにみえる。期待効用仮説の非常に現実的な魅力はその取り扱い方が簡単なことと，少なくともある重要な領域で，仮説が矛盾を引きおこしそうにない間接的な証拠（すなわち公理系のもっともらしさ）にもとづいていること，この両者である。“Von Neumann-Morgenstern の重要な，独創的な貢献は，正しく，仮説を公理化することによってこの間接的な証拠を提供したことである（Friedman-Savage，1952，p. 467）。”

効用関数の存在命題と公理系の成立は，論理的に同値である，すなわち，必要充分条件の関係にある。しかしながら，公理系は期待効用仮説の必要条件であるが，期待効用仮説の正当性を主張するための充分条件ではない。すなわち，期待効用仮説の成立から公理系の成立は導きだされる。一方，公理系が行動の記述という点に関して全く妥当であるとしても，期待効用仮説は公理系が指している行動よりももっと広い範囲における行動を予測しようとしている。公理系が意思決定者の行動を予測するに充分な条件であるという保証はない。それ

ゆえに，期待効用定理の成立は期待効用仮説の成立を意味していると我々は言うことができない。

一般的に言って，仮説はある現象や事実を合理的・体系的に説明するために仮りに設けられた仮定である。したがって，たとえ期待効用仮説が，ある範囲内で，意思決定者の行動を正確に，かつ，しばしば予測しえたとしても，それは有力な推測手段であり，より良い予測成果をもたらすだろうと期待されるにすぎない。したがって，1プラス1が2であるというような予測結果が期待効用仮説によってもたらされるわけではない。

公理系を満足するような効用関数の存在を期待効用定理は保証している。しかしながら，**効用の測定可能性**の課題がある。期待効用仮説を立証するためには効用は測定可能でなければならない。測定されるということは何を意味しているのか，この点に関して，測定の基礎の視点から少し考察してみよう（Krantz-Luce-Suppes-Tversky, 1971, 第1章）。

測定とは，**経験的な関係**（emprical relations）からなるシステムE（経験的関係システムと呼ぶ）と**数値的な関係**（numerical relations）からなるシステムN（数値的関係システムと呼ぶ）の間における変換（正確には，**準同型写像**）の確立と考えられる。

註：準同型写像（homomorphism）の定義を示そう（Finkbeiner , 1960, p. 261）。システムEは要素の集合S，要素間の関係r_i，$i=1, 2, \cdots, m$，要素に関する演算O_j，$j=1, 2, \cdots, n$，から構成され，システムE'は要素の集合S'，要素間の関係r_i'，$i=1, 2, \cdots, m$，要素に関する演算O_j'，$j=1, 2, \cdots, n$，から構成されているとしよう。記号的には，

$E=\{S, r_i, i=1, 2, \cdots, m, O_j, j=1, 2, \cdots, n\}$,

$E'=\{S, r_i', i=1, 2, \cdots, m, O_j', j=1, 2, \cdots, n\}$

と定義される。そのとき，EからE'の中への準同型写像はつぎの条件(a)， (b)を満たすSからS'の中への写像Hである；

(a)　もしSにおいて$a r_i b$ならば，そのときS'において$aHr_i' bH$，$i=1, 2, \cdots, m$，であり，

(b)　全てのa，$b \in S$に対して

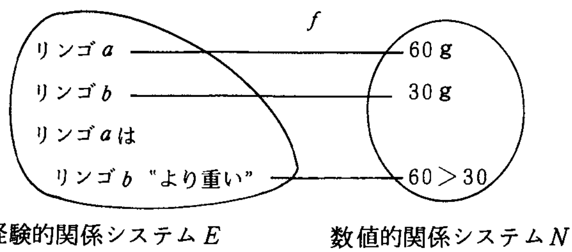
$(a O_j b) H = aHO_j' bH$，$j=1, 2, \cdots, n$，である。

経験的関係システムEは現実の対象の集合とそれの間にある関係の集合から構成されている；例えば，対象の集合はリンゴの集りであり，関係の集合は“より重い”，“より軽い”，“等しい”の三つの関係からなる集りである。一方，数値的関係システムNは実数の集合とそれの間にある数値的関係の集合から成立している；例えば，実数の集合は，リンゴの集りに対しては，正の実数であり，数値的関係の集合は“大きい”，“小さい”，“等しい”の三つの関係からなる集りとなる。

そのとき，**測定のシステム**はシステムE，システムN，システムEの対象の集合とシステムNの実数の集合との間における変換fの三つの組（E，N，f）と定義される。ただし，変換f（準同型写像）はある経験的関係とある数値的関係を対応させている。

例えば，ハカリによって，リンゴには正の数が割り当てられる。そのとき，リンゴaがリンゴb“より重い”という経験的関係はリンゴaの60（g）がリンゴbの30（g）“より大きい”という数値的関係に対応している。

図　6－1



期待効用を測定システム（E, N, f）の視点から眺めるとき，経験的関係システムEは選択対象の集合と公理系から成り立っており，数値的関係システムNは期待効用と大小関係から成り立っているから，変換fは効用関数であると言える。普通，重さが測定されたと言うとき，リンゴaはリンゴb“より重い”という関係だけでなく，リンゴaの重さはリンゴbの重さの2倍であるという関係も維持されていなければならない。さらに，重さは加算，減算をも可能にさせる測定値を要求している。すなわち，重さが測定されたと言うとき，重さに関する経験的関係が数値的関係によって表現され，数値的関係が重さに関する経験的関係によって表現されることが意味されている。

同様に，期待効用が測定されたと言うとき，選好に関する経験的関係が効用の数値的関係によって表現され，効用の数値的関係が選好に関する経験的関係によって表現されることが成立しなければならない。すなわち，効用の数値的関係または期待効用仮説が経験的関係を予測しなければならない。

しかしながら，重さが測定されたというときと効用が測定されたというときでは，現実にはかなり相違がある。重さの測定では経験的関係が我々の常識に合致するように数値的関係に反映されている。一方，効用の測定では，現在までの研究が示すところは期待効用仮説と調和していないようにみえる（Schoemaker , 1980 , 1982）。ただ，このことをもって，効用の測定は不可能であると言うことはできないだろう。

期待効用論者の中でも，規範的視点を重くみる人々，例えばMarschak（1951），は期待効用仮説に沿った行動をしないことを意思決定者の計算能力の欠除に帰着させている。さらに，重さの測定の場合でも常に測定可能であるとは言えない。例えば，測定の精度を高く要求すればするほど，測定は，増々，困難になり，ハカリが振動している状況でしか測定できない物体では，重さを測定することは不可能であるかもしれない。

それゆえに，測定の精度を粗くとり，測定される対象と測定がなされる環境

を限定するとき，効用は測定可能であると言えるかもしれない。

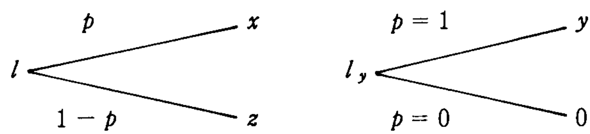
3.　効用関数の推定手続

3－1　はじめに

確実な結果の集合Xは金額によって定義されているとしよう。そして，x，y，$z \in X$は$x > y > z$であるとしよう。そのとき，“くじ” $l = (p \cdot x, (1-p) \cdot z)$と金額$y$との間に選好関係が考えられる。ただし金額$y$は確率1で$y$が生じる“くじ” l_yとみなしておく。

“くじ” l，l_yは**標準くじ**（Standard reference lotteries）と呼ばれる。

図　6－2



効用の評価は，普通，これらの標準くじ間の選好関係を意思決定者に要求することによってなされる。

これら2つの標準くじl，l_yには4つの変数x，y，z，pが含まれている。これら4変数の中で，3変数が固定され，lとl_yが無差別になるように，残り一変数の値を意思決定者が決めることによって効用の測定手続は進められる。したがって，標準くじl，l_yではどの変数の値を意思決定者が決定するかにより，4つの効用の測定手続が考えられる；

(1)　**確実等価法**：x，z，pが所与であり，意思決定者は$l \sim l_y$となるようなyの値を決める。

(2)　**確率等価法**：x，y，zが所与であり，意思決定者は$l \sim l_y$となるようなpの値を決める。

(3)　**x－等価法**：y，z，pが所与であり，意思決定者は$l \sim l_y$となるようなxの値を決める。

(4)　**z－等価法**：x，y，pが所与であり，意思決定者は$l \sim l_y$となるようなzの値を決める。

しかしながら，実際に，効用の測定手続で使われている方法の多くは確実等価法と確率等価法である（Hershey-Kunreuther-Schoemaker, 1982）。以下，我々は確実等価法のもとで議論しよう。確実等価法では，固定されたx，z，pに対して，すなわち，“くじ”$l=(p \cdot x, (1-p) \cdot z)$に対して，確実等価額を意思決定者が表明するが，この4つの変数x，y，z，p間に成立する関係（x，y，z，p）は**定量的制約**（quantitative restrictions）と呼ばれている（Meyer-Pratt, 1968, Keeney-Raiffa, 1976）。

意思決定者はこの定量的制約に加えて，**定性的制約**（qualitative restrictions）を持っているだろう（Meyer-Pratt, 1968, Keeney-Raiffa, 1976）。例えば，意思決定者がリスク回避的であるかリスク愛好的であるかというような効用関数の性質を決定する要因がある。そして，効用関数の定義域Xのある点ω，すなわち，ある金額ωよりも大なる領域では意思決定者はリスク回避的であり，ωよりも小なる領域では起死回生を期してリスク愛好的であるかもしれない。

さらに，意思決定者がリスク回避的であるとしても，彼の資産がωより増大していくとき，ある“くじ”lに対するリスク・プレミアムは減少していくかもしれない。すなわち，意思決定者は逓減リスク回避的であるかもしれない。

定性的制約が定量的制約と無矛盾である保証はない。すなわち，意思決定者の選好表現は一貫していないかもしれない。このような矛盾を修正するプロセスを通じて効用関数の推定手続は進められる。

3－2　定量的制約の決定手順

定量的制約を決定する，最も簡明な方法は**半々くじ**$l=(\frac{1}{2} \cdot x_0, \frac{1}{2} \cdot x_1)$に対する確実等価額を意思決定者に求めることである（Marschak, 1964, Raiffa, 1968, Schlaifer, 1969, Keeney-Raiffa, 1976）。いま，区間$[x_0, x_1]$における定量的制約が求められているとしよう。ただし，$x_1 > x_0$である。そし

て，求められるべき意思決定者の効用関数はuであるとしよう。

効用は線型変換まで一意的であるという意味で相対的なものであるから，測定の原点と単位を決めるために，任意の二つの結果に効用を任意に付与し，他の結果に対してはこれら二つの結果に相対的な効用の評価をなすことが可能である（式（3．5），参照）。したがって，

$$u(x_0)=0 \tag{6.1}$$

$$u(x_1)=1 \tag{6.2}$$

とすることができる。そのとき“くじ”$l_1=(\frac{1}{2}\cdot x_0, \frac{1}{2}\cdot x_1)$に対する確実等価額$x_{1/2}$はつぎの式を満たす；

$$u(x_{1/2})=\frac{1}{2}u(x_0)+\frac{1}{2}u(x_1)$$

式（6．1），（6．2）から

$$u(x_{1/2})=\frac{1}{2} \tag{6.3}$$

となる。したがって，一つの定量的制約$(x_0, x_{1/2}, x_1, \frac{1}{2})$が得られる。

つぎに，意思決定者は“くじ”$l_2=(\frac{1}{2}\cdot x_0, \frac{1}{2}\cdot x_{1/2})$に対する確実等価額を$x_{1/4}$と評価したとしよう。そのとき，

$$u(x_{1/4})=\frac{1}{2}u(x_0)+\frac{1}{2}u(x_{1/2})$$

となり，式（6．1），（6．3）から

$$u(x_{1/4})=\frac{1}{4}$$

となる。また，“くじ”$l_3=(\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}, \frac{1}{2}\cdot x_1)$に対しても同様に

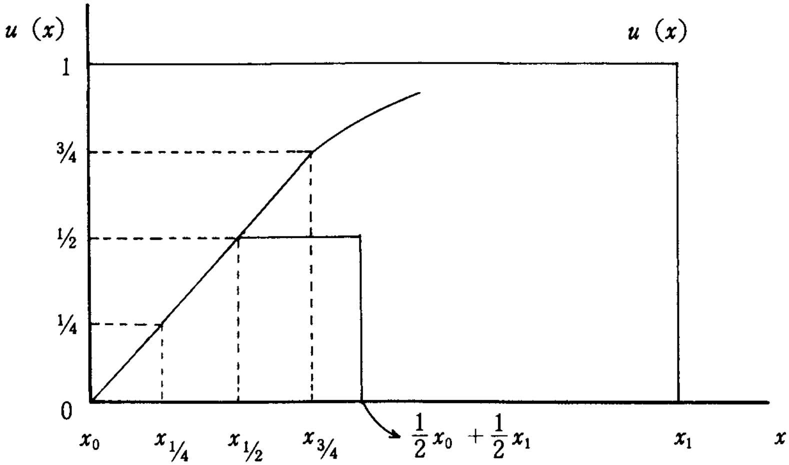
$$u(x_{3/4})=\frac{1}{2}u(x_{1/2})+\frac{1}{2}u(x_1)$$

となり，

$$u\ (x_{3/4}) = \frac{3}{4}$$

が得られる。これらの点（x_0，0），（$x_{1/4}$，$\frac{1}{4}$），（$x_{1/2}$，$\frac{1}{2}$）

図　6－3



（$x_{3/4}$，$\frac{3}{4}$），（x_1，1）は，座標上に描くとき，図6－3のようになる。

同様に，“くじ”　$l_4 = (\frac{1}{2}\cdot x_0\ ,\ \frac{1}{2}\cdot x_{1/4})$

では

$$u\ (x_{1/8}) = \frac{1}{2}\ u\ (x_0) + \frac{1}{2}\ u\ (x_{1/4})$$

$$u\ (x_{1/8}) = \frac{1}{8}$$

となり，“くじ”　$l_5 = (\frac{1}{2}\cdot x_{1/4}\ ,\ \frac{1}{2}\cdot x_{1/2})$　では

$$u\ (x_{3/8}) = \frac{1}{2}\ u\ (x_{1/4}) + \frac{1}{2}\ u\ (x_{1/2})$$

$$u\ (x_{3/8}) = \frac{3}{8}$$

となり，“くじ”　$l_6 = (\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}\ ,\ \frac{1}{2}\cdot x_{3/4})$　では

$$u(x_{5/8}) = \frac{1}{2}u(x_{1/2}) + \frac{1}{2}u(x_{3/4})$$

$$u(x_{5/8}) = \frac{5}{8}$$

となる。さらに，“くじ” $l_7 = (\frac{1}{2} \cdot x_{3/4}, \frac{1}{2} \cdot x_1)$ では

$$u(x_{7/8}) = \frac{1}{2}u(x_{3/4}) + \frac{1}{2}u(x_1)$$

$$u(x_{7/8}) = \frac{7}{8}$$

が得られる。

原則的には，このようにして得られた，数多くの点に最も適合する関数が意思決定者の効用関数とされている。

3－3　効用関数の推定

前節における手順で定量的制約が得られたとしよう。しかしながら，意思決定者の選好表現は一貫していないかもしれない。例えば，“くじ” $l_8 = (\frac{1}{2} \cdot x_{1/8}, \frac{1}{2} \cdot x_{5/8})$ に対して意思決定者が確実等価額 x^*を示したとき

$$u(x^*) = \frac{1}{2}u(x_{1/8}) + \frac{1}{2}u(x_{5/8})$$

$$u(x^*) = \frac{3}{8}$$

となる。しかしこの x^* が $x_{3/8}$ と同じでないかもしれない。もしこのような事実が観測されたならば，期待効用の視点から一貫した選好がなされていないことになる。

そのとき，意思決定者は x^*, $x_{5/8}$ あるいはそれら両者を変更し，期待効用の算定と彼の選好が矛盾しないようにしなければならない。また，意思決定者がリスク回避的であるにもかかわらず,

$$u(x_{7/8}) > u(\frac{1}{2}x_{3/4} + \frac{1}{2}x_1)$$

を示すかもしれない。そのとき

$$u\left(\frac{1}{2}x_{3/4}+\frac{1}{2}x_1\right)>u\left(x_{7/8}\right)$$

となるように意思決定者は確実等価額 $x_{7/8}$, $x_{3/4}$ あるいはそれら両者を再評価しなければならない。

しかしながら，確実等価額は意思決定者の“くじ”に対する態度によって決定される。したがって“くじ”に対するリスク回避の程度と“くじ”の結果の両者が意思決定者の選好に反映される。そのとき，意思決定者の効用関数がどのようなものであるかは未知であるゆえに，単に確実等価額 $x_{7/8}$ を変更すべきか，あるいは，意思決定者がリスク回避的であることを変更すべきかに対する解答が必要とされる。残念ながら，この問題に対して論理的に明確な解を与える根拠がない。確実等価額を再評価しなければならないとき，どの確実等価額が信頼しうるかについて意思決定者は慎重に考慮しなければならない。一つの確実等価額が変更されるならば数多くの確実等価額を変更しなければならないかもしれない。定性的制約との一慣性を含めて，一慣性のある効用を評価する手続はかなり煩雑である。さらに，仮りに定性的制約と定量的制約に関して一慣性が得られたとしても，それらの制約を満たす効用関数を定める一般的手続は存在しないと言われている（Keeney-Raiffa ,1976 , p. 197)。

ただし，定量的制約が確定しているという条件のもとで所与の定性的制約を満たす効用関数が存在するかどうかの問題に対しては，限定されてはいるがかなり重要なケースにおいて，その存在を確認するアルゴリズムが与えられている（Meyer-Pratt, 1968)。

とにかく，試行錯誤によって定量的制約と定性的制約を満たす関数は作成されるだろう。“原則的には，金額の上で定義された効用関数は効用に操作的な意味を与えるようなある実験によって決定される”とされている（Savage , 1971 , p. 785）。しかしながら，“くじ”の結果を金額に換算することが容易でないならば，効用の測定は一層困難になるだろう。

例えば，癌患者の治療に関して，手術と放射線治療の比較がなされた。手術では手術の失敗による危険はあるが，術後における生存率は放射線治療におけるそれよりも高い。医者のあるグループに2つの治療の各々における1年間と5年間の生存率が示された。このデータのもとで，医者の84%は手術を選好し，残りの16%は放射線治療を選好した。一方，医者の他のグループには同じデータで異なる表現が示された。すなわち，生存率の代りに，死亡率が使われた。死亡率は1マイナス生存率であるゆえに，死亡率と生存率は論理的に同値であるだけでなく，2つの表現は互いに簡単に変換されうるものである。死亡率と生存率の間における変換は医者にとっていとも容易なことであるにもかかわらず，放射線治療よりも手術を選好する医者の比率は84%から50%に落ちた（Arrow ,1982）。

このように，同じ内容に関して表現の方法あるいは文脈が異なるとき，効用測定の手続は意思決定者の選好とは異なる選好表現をもたらすかもしれない。さらに，この選好の逆転現象（preference reversal phanomenon）は金額で定義される状況においても生じると報告されている（Grether-Plott ,1979 , Hershey-Kunreuther-Schoemaker ,1982）。この現象は**文脈効果**（context effects あるいは framing）と呼ばれている。

4. リスク的初期条件における推定

とにかく，金額の集合Xの上で定義された効用関数が前節で述べられたような手続によって推定されたとしよう。そのとき，初期条件がリスク的であるならば，推定された効用関数vはどのような問題点を含んでいるかを検討しよう。

まず，代表的な期待効用論者の一人であるSchlaiferの見解をみてみよう。効用の測定は区間［z_0 , z_1］でなされ，意思決定者の初期条件は－4000ドルであるとしよう。ある“くじ” $l=(p_1 \cdot x_1\ ,\ p_2 \cdot x_2)$ に意思決定者が直面しているとき，彼は，最終的資産の視点から（－4000） $*\, l$ について評価をなす。

したがって，

$$-4000 * l = -4000 * (p_1 \cdot x_1 \ , p_2 \cdot x_2)$$
$$= (p_1 \cdot (x_1 - 4000) \ , p_2 \cdot (x_2 - 4000))$$

であるゆえに，意思決定者の最終的資産は（x_1-4000）か（x_2-4000）のどちらかになる。いま，$x_1-4000=\overline{W}$とおこう。そのとき，“くじ” l による結果が x_1であると言うことと意思決定者に起りうる最終的資産の一つが$\overline{W}$であると言うことは同じ内容を２つの異なった形で表現しているにすぎない。

このような議論のもとで，Schlaifer はつぎのように言う；“もし Mallon氏が区間［z_0 , z_1］に関して最終的資産$\overline{W}$の効用を q とするならば，そのとき区間［z_0+4000 , z_1+4000］に関して“くじ” l の結果 $x_1=\overline{W}+4000$の効用もまた q である（Schlaifer ,1969, p.164）。” この結論から，意思決定者は，最終的資産に関心をもっていようとも，単に“くじ”そのものを選択対象とすることによって矛盾なく効用を決定することができることになる。これは式（５．４）によって示されている増分型の効用評価，すなわち

$$v\ (y) = u\ (x) - u\ (\omega)$$
$$\text{ただし}\ y = x - \omega$$

の有効性を主張している。

さて，意思決定者のリスク的初期条件は“くじ” l_0であるとしよう。そして，効用の測定手続における半々くじ $l_1=(\frac{1}{2}\cdot x_0 \ , \frac{1}{2}\cdot x_1)$ の確実等価額が $x_{1/2}$ であったとしよう。さらに，意思決定者の，推定されようとしている効用関数は u であるとしよう。

そのとき，意思決定者にとって関心のある最終的資産の視点からは，

$$l_0 * x_{1/2} \sim l_0 * l_1$$

すなわち，

$$u\ (l_0 * x_{1/2}) = u\ (l_0 * l_1) \qquad (6\ .\ 4)$$

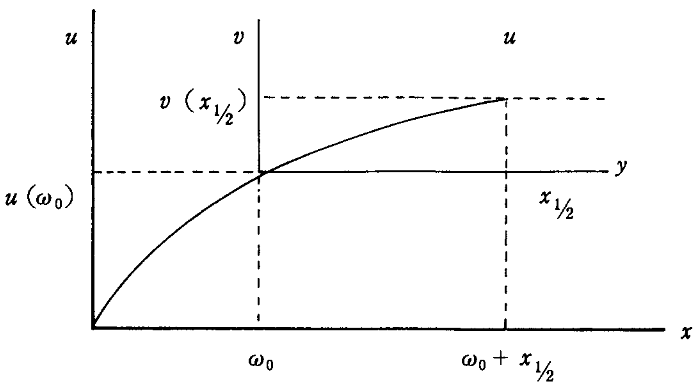
でなければならない。一方，区間［z_0 , z_1］で推定された効用関数を v としよ

う。そのとき，“くじ” $l_1 = (\frac{1}{2} \cdot x_0, \frac{1}{2} \cdot x_1)$ と確実等価額 $x_{1/2}$ が無差別であることをこの効用関数 v で表現すると

$$v(l_1) = v(x_{1/2})$$

である。推定されるべき効用関数 u と推定された効用関数 v は意思決定者の選好表現に関して論理整合的でなければならない。

図　6－4



いま，推定された効用関数 v はある点 ω_0 から算定されたものとしよう。すなわち，

$$v(l) = u(\omega_0 * l) - u(\omega_0) \qquad (6.5)$$

であるとしよう。式（6．5）を図に描くとき，図5－1と同様に図6－4が得られる。そのとき，図6－4から理解されるように，$v(x_{1/2})$は関数 u においては $u(\omega_0 * x_{1/2})$ すなわち $u(\omega_0 + x_{1/2})$ と同じ値をもつ。そして，推定されるべき効用関数 u と推定された効用関数 v が論理整合的であるためには

$$\begin{aligned} u(l_0 * x_{1/2}) = u(l_0 * l_1) &= u(\omega_0 * x_{1/2}) \\ &= u(\omega_0 * l_1) \end{aligned} \qquad (6.6)$$

でなければならない。

もし式（6．6）を満たすような ω_0が存在するならば，効用関数の推定手続によりこの ω_0を原点とする関数 v を決定することができる。いま，区間［z_0,

z_1］は正の金額上にあると仮定しておく。

意思決定者が一定リスク回避的であり，初期条件 l_0の確実等価額が ω_0，すなわち，

$$\omega_0 = \phi\ (l_0) = u^{-1}\ u\ (l_0)$$

であるならば，そのとき，定理4．1から，

$$u\ (l_0 * l_1) = u\ (\omega_0 * l_1)$$

となる。さらに，Pfanzagl の一貫性公理，式（5．3）から，

$$u\ (l_0 * x_{1/2}) = u\ (\omega_0 * x_{1/2})$$

となり，式（6．6）が成立する。したがって，もし意思決定者が一定リスク回避的であり，初期条件 l_0が既知であるならば，初期条件 l_0に対する確実等価額 ω_0が推定された効用関数 v の原点となる。ただし，一定リスク回避の場合には，効用の測定手続から理解されるように，関数 v の推定に初期条件 l_0は必要とされない。

一方，意思決定者が逓減リスク回避的であり，初期条件 l_0の確実等価額が $\omega_0 = \phi\ (l_0)$ であるならば，そのとき，定理4．1より，

$$u\ (l_0 * l_1) > u\ (\omega_0 * l_1)$$

となる。したがって，確実等価額 ω_0は式（6．6)を満たさず，確定された効用関数 v の原点になる資格をもたない。

それでは，$\omega_0 = \phi\ (l_0)$ 以外の点 ω_0' を原点として効用関数 v が推定されたであろうか。この質問に対する答は否定的である。

効用 $u\ (l_0 * x_{1/2})$ に対する確実等価額 $\phi\ (l_0 * x_{1/2})$ は式（2．8）ならびに $\pi\ (l_0 * x_{1/2}) = \pi\ (0,\ l_0 * x_{1/2}) = \pi\ (x_{1/2},\ l_0)$ から

$$\phi\ (l_0 * x_{1/2}) = E\ (l_0) + x_{1/2} - \pi\ (x_{1/2},\ l_0) \qquad (6.7)$$

と表現される。そのとき，式（6．6）における

$$u\ (l_0 * x_{1/2}) = u\ (\omega_0' * x_{1/2})$$

は

$$\phi\,(l_0 * x_{1/2}) = \omega_0' + x_{1/2} \tag{6.8}$$

を意味する。したがって，式（６．７），（６．８）から

$$\omega_0' = E\,(l_0) - \pi\,(x_{1/2},\ l_0) \tag{6.9}$$

が得られる。

“くじ” l_0は，初期条件であるゆえに，効用関数の推定手続のプロセスにおいて変ることはない。一方，$x_{1/2}$は “くじ” $l_1 = (\frac{1}{2}\cdot x_0\ ,\ \frac{1}{2}\cdot x_1)$ の確実等価額であった。式（６．９）から容易に理解されるように，点ω_0' は確実等価額$x_{1/2}$ に依存している。このことは，推定手続において“ くじ” l_1 とは異なる“くじ”，例えば$l_2 = (\frac{1}{2}\cdot x_0\ ,\ \frac{1}{2}\cdot x_{1/2})$ に対する確実等価額$x_{1/4}$ が求められたとき，

$$\omega_0' = E\,(l_0) - \pi\,(x_{1/4},\ l_0) \tag{6.10}$$

の成立を要請する。

リスク・プレミアム$\pi\,(x_{1/2},\ l_0)$と$\pi\,(x_{1/4},\ l_0)$が同じでないとき，式（６．９）と（６．10）は両立しない。推定されるべき効用関数uが一定リスク回避的であるならば，リスク・プレミアム$\pi\,(x_{1/2},\ l_0)$と$\pi\,(x_{1/4},\ l_0)$は同じであるゆえにこの困難は生じない。しかしながら，効用関数あるいは意思決定者が逓減リスク回避的であるならば，そのときリスク・プレミアム$\pi\,(x_{1/2},\ l_0)$と$\pi\,(x_{1/4},\ l_0)$は異なる。

したがって，効用関数vの原点ω_0' は，確実等価額の値が異なるような“くじ” が意思決定者によって評価されるたびに，移動する。このように，初期条件がリスク的であり，意思決定者が逓減リスク回避的であるとき，推定されたはずであった効用関数vには効用を測定する**一意的な原点**が存在しない。

第7章　小世界と制約された合理性

1. はじめに

将棋をいかに指すかということを意思決定問題の例としてとりあげよう。もしある人が初手から終局までに到る全てのケースを読み切ることができるならば，そのときその人は，ただ一度の長考で，初手から終局に到るまでの一連の指し手の中から最善のものを選ぶことができる。もしこれが可能であるならば，将棋に勝つ最も良い方法はこのただ一度の長考であろう。しかしながら，終局まで読み切るという方法は人間の能力を超えている。

将棋の専門家が考案した指し方は一局の将棋を序盤，中盤，終盤という3つの局面に分けることである（Toda-Shuford (1965) による，チェスのゲームをとり上げた同様の議論があるので参照されたい）。序盤では，将棋の戦い，すなわち，中盤を有利に進めるために駒組に腐心が寄せられる。中盤では，駒の取り合いによる駒の損得，盤上の駒の働きに関心が持たれる。終盤では，相手の王を詰めることに注意が集中され，寄せの速度が重視される。

いま，仮に，将棋の一局を大世界と呼ぶことにしよう。そのとき序盤，中盤，終盤は大世界を構成する小世界である。専門家と言えども大世界におけるただ一つの方針を選ぶことによって将棋に勝つことはできない。専門家の将棋には持時間制度がある。さらに，持時間が無制限であろうとも，初手から終局まで読み切ることは手数の巨大さから言って不可能である。将棋より単純なゲームであるチェスでさえも，その手数は10^{120}であると言われている。

したがって，専門家は限られた局面である序盤，中盤，終盤の各々において最善手を探索する。しかし，序盤，中盤，終盤という小世界はほとんど独立していない。さらに，これらの小世界をどのように認識しているかは各人によっ

て異なるだろう。小世界の認識あるいは評価が勝負として結実する。

この将棋の世界は意思決定問題に対する含蓄のある例となっている。本章では，小世界と制約された合理性，この２つの視点から期待効用が考察される。

将棋の例から理解されるように，当面の意思決定問題に関係する全ての状態を完全に考慮に入れて決定することは最善の行動であるかもしれない。しかしながら，時間，費用ならびに情報処理能力の点からそれは不可能であると言えるだろう。そこで，意思決定者が満足できる程度まで，単純な問題に注意を限定する必要がある。

その限定された範囲を Savage (1954) は小世界（small world) と呼ぶ。この小世界において確実であると考えられている結果が大世界の視点からはリスク的または不確実である。２－１節では，小世界，大世界，この不確実性について考察がなされる。２－２節では，小世界の構成についての期待効用論者の見解，前節における不確実性と期待効用の関係についての議論がなされる。

３－１節は Simon (1982) の制約された合理性（Bounded Rationality）の理論，それにおける２つの重要な概念，すなわち，欲求水準と満足化手続の解説である。小世界が定められるプロセスは制約された合理性の側面から潜在的な選択対象の探索となり，そのプロセスそのものは期待効用の算定に大きな影響を与えることが，３－２節で，指摘される。３－３節では，小世界は期待効用の初期条件の認識に関連していること，初期条件は不確実またはリスク的であるとすることの意義が強調される（伊藤，1984，a)。

なお，「不確実性」は一応リスクを含むものとしておこう。

2. 小　世　界

２－１　小世界と大世界

硬貨が投げられ，表がでるとき新車が得られ，裏がでるとき中古車が得られるような“くじ” l を考えよう。意思決定者がこの“くじ” l を50万円で買う

べきかどうかを判断しなければならないとし，彼の関心はこの問題にだけあてられているとしよう。いま，表がでることを e_1，裏がでることを e_2，“くじ” l を買わないことから生じる状況，すなわち50万円を保有することを e_3 としよう。そのとき，e_1，e_2，e_3 はそれぞれ世界の状態（a state of the world）と呼ばれる。そして，世界の状態の集合 $E=\{e_1, e_2, e_3\}$ は**世界**（the world）と呼ばれる。

“くじ” を50万円で買うことを a_1，“くじ” を買わないことを a_2 としよう。そのとき，a_1，a_2 はそれぞれ行為（an act）と呼ばれる。行為の集合を $A=\{a_1, a_2\}$ と定義しよう。新車を c_1，中古車を c_2，50万円を c_3 としよう。そのとき，c_1，c_2，c_3 はそれぞれ結果（a consequence）と呼ばれる。結果の集合を $C=\{c_1, c_2, c_3\}$ と定義しよう。そして，いま E を “くじ” の世界と呼ぶことにする。

そのとき，Savage の期待効用モデルの構成要素はこれらの集合 E, A, C である。行為，状態，結果の関係は表７－１に示されているようになる。そして，Savage によれば，意思決定者が関心をもつ対象は世界であり，世界の状態とは決定に関連する全ての側面を記述しているような，世界の一つの記述である。

表７－１

行為	状態		
	e_1	e_2	e_3
a_1	c_1	c_2	
a_2			c_3

一般的に言って，意思決定者の選好に関連する世界はどのように決定されるかという問題がある。“くじ” l を50万円で買うべきかどうかという決定問題では，普通，“くじ” の結果である新車，中古車，あるいは，50万円は確実なものと仮定されている。これは，もちろん，結果に対する意思決定者の認識の問題ではあるが，ある意思決定者にとってはそのような仮定のもとで選好問題

を分析することが適切であるかもしれない。

しかしながら，思慮深い意思決定者がこれらの結果に対して充分な注意を払うとき，それらの結果にはリスク的要素または不確実的要素が残っていることを彼は認識するかもしれない。運が良ければ，中古車はほとんど故障なしに走りつづけるだろう。新車を手に入れたときには，衝突事故によって新車が金額的価値ゼロになるかもしれない。このリスクを防ぐためには彼は車両保険に入らなければならないかもしれない。新車に対する車両保険料は中古車に対するそれよりも高い。もしこの秋に大きな台風が襲ってくるならば，彼の家はかなり被害を受け，それの修復に多額の金を必要としそうだと彼は考えている。そのとき，彼は50万円の支出を控え，“くじ”の購入による車の取得を断念するかもしれない。さらに，大きな台風が彼の住宅地を直撃する可能性はまた不確実である。等々，これらの不確実性，または，可能性に対する配慮はとめどもなく続くだろう。

このような慎重な配慮をSavageは“Look before you leap”（ころばぬ先のつえ，または，実行する前に熟慮せよ。New English-Japanese Dictionary 研究社）という諺で表現している（Savage, 1954, p.16)。

世界Eの状態e_3，すなわち，“くじ”を買わないこと，あるいは，50万円を保有することに関して，大きな台風が襲ってくること，彼の家が被害を受けること，それの修復にある金額が必要とされること，これらの状態から構成される世界がある。これを**50万円の世界**と呼ぶことにしよう。そして，同様に，新車の世界，中古車の世界があるだろう。さらに，一つの決定は別の決定に導くかもしれない。例えば，被害を受けた家が元のように修復されないとき，意思決定者は妻の苦情に悩まされるかもしれないゆえに，家をどの程度まで修復するかについて彼は決定しなければならないかもしれない。

“くじ”の世界Eは50万円の世界，新車の世界，中古車の世界から構成されていると考えられる。したがって，50万円の世界，新車の世界，中古車の世界

における決定問題は“くじ”の世界Eにおける決定問題に比較して小さい世界におけるそれであろう。このように，“くじ”の世界E，すなわち，**小世界**における決定問題で，普通，確実な結果と考えられているものは，現実には，高度に**不確実**であると考えられる（Savage,1954, p.84）。

実際，“Look before you leap”の原則に正確に従って，行為，結果，状態を定式化することは不可能である。意思決定者が決定問題に関連ありとして選びだした状態は彼の予見能力からみて必然的に不完全になるであろう。確実であると考えられている結果は，意思決定問題においては，本質的に確実ではない。意思決定者は将来になさなければならない一連の決定を，ある程度は，想定することができるだろう。しかしながら，彼が予測していなかった，あるいは，予測ができないような出来事により，想定された一連の決定は実行不可能であるかもしれない。

仮に，“Look before you leap ”の原則に，完全にとまで言わなくとも，かなり忠実に従うとしても，決定に関連する世界の状態，それらにともなう結果，とりうる行為を詳細にひろいあげることは膨大な作業量となり，それに必要な時間も長期的になるだろう。たとえそのような作業が完成されたとしても，それに要した時間があまりにも長いために，決定問題そのものが意思決定者にとって無意味になっているかもしれない。さらに，彼の目的や経験が変化しているかもしれない。

しかしながら，理想化されてはいるが，非常に簡潔なモデルが“Look before you leap”の原則から作成されうる。すなわち，全ての可能性が検討されているときには，一連の決定としての方針が**ただ一つの決定**によって選好されること，そのことが可能になる。さらに，その結果として意思決定に時間的要因を考慮する必然性がない，なぜならば，意思決定者は決定に関連する全ての要因が配慮された，ただ一つの決定をなすからである。

ただ一つの決定なる視点が極端にまで強調されるとき，意思決定者は人生を

いかに生きるべきかについての方針を選好しなければならないことになる。その方針が選択されたのちには，彼は計画に従って行動し，死に到るまで意思決定問題を考慮する必要がなくなる。しかしながら，このプログラムは高度に理想化されており，現実には取扱い不可能なものである。

人生をいかに生きるべきかについての詳細な方針を選択する問題に関する世界は意思決定者にとって最も大きな世界であろう。このような世界をSavageは**大世界**（grand world）と呼ぶ。前述の“くじ”の世界はこの大世界の一部とされる。期待効用モデルが現実の意思決定問題に対して有効な手法であるためには，大世界が取扱い可能な世界に分割されなければならない。ある意思決定問題をどのような範囲の枠組で定式化するかが決められなければならない。

現金50万円の処理に関して，それを保有すること，“くじ” l を買うことなどの行為以外に，他の行為，例えば有価証券を買うこと，はどの程度まで考慮されるべきかが決められなければならない。それらの行為にともなう一連の決定ならびに諸々の結果そして，同時に，時間的考察範囲，世界の状態についての詳細の程度が決定されなければならない。

2－2　小世界と期待効用

とにかく，このようにして決められる，取扱い可能な世界をSavageは**小世界**と呼ぶ。その小世界が大世界から孤立した状況であることは意思決定が有効に働くための必須条件である。もし小世界が大世界から孤立していないならば，そのとき大世界からの影響により意思決定者はその小世界だけで決定をなすことができない。とはいえ，“そのような孤立した状況が現実にどのように到達されるのか，どのようにして正当化されるのかを完全無欠に言うことは困難であると私は認める。”とSavageは言う（Savage, 1954, p.83）。

意思決定問題を孤立させることには限界があり，その限界はかなり恣意的であり，満足できる程度という言葉で表現されるようなものとなるだろう。

“くじ”の世界のような場合においても，時間的限界，世界の状態，一連の決定などがかなり狭い範囲に限定されるときでさえ，“Look before you leap”の原則に従ってそれらを記述することは作業量として小さくはない。

しかし，Savage が展開している基本モデルは “Look before you leap”が支配する大世界を前提としている。大世界と小世界の両者に一貫した決定がなされるためには，それら両者の間にある関係が成立しなければならない。大世界における“Look before you leap”の原則が小世界にどのように適用されるかということはSavage の大きな関心の一つであった。大世界と小世界に一貫した定式化を試みた彼の意図は定式化における論理一貫性を示すことだけであったようにみえる。しかしながら，この企ては，大世界の非現実性からみるとき，意思決定理論としての期待効用をより有益な手法として促進させる役割を果していない。

意思決定問題の定式化は，必然的に，小世界を表現していなければならない。**孤立した小世界**を構成することについてのSavageの結論では“私はこれらの小世界を選ぶための規準を定式化することができない。そして，それらの選択は完全にかつ鮮明に定義された原則を述べることのできない判断と経験の問題であるだろう。…他方，それは我々全てが必然的に多くの経験を有している一つの活動（operation）であり，かつ，実際には大方の同意が得られている活動でもある（Savage, 1954, p.17)。” さらに，つぎのような主旨のことは彼は言う；「“Look before you leap”の原則を忠実に実行することは非常識ではあるが，この原則が適用されうるような小世界に注意を限定することによって，比較的単純な決定問題が分析されるならば，この原則は有益である。」

この主旨は，一見したところ，注意をひくべき内容を含んでいないようにみえるが，“Look before you leap”の原則を小世界に適用する意図が小世界においても一連の決定をただ一つの決定として定式化することであることに注目されたい。

ある人々，Toda-Shuford (1965)，は期待効用を応用するさいにおける大きな問題は小世界を適切に定式化することの困難性にあると考えている。期待効用の意図に反する諸々の反例は小世界が大世界から有意義に分割されていないことの結果としている。すなわち，適切な小世界では期待効用が意思決定者の行動を説明できること，それが真実であるとしても，ある世界Eより大きい世界の文脈から期待効用仮説に従って行動する意思決定者はある世界Eの文脈からその仮説に従っているかのように行動しない（Toda-Shuford,1965, p. 252)。そして，この困難を克服する方法として，小世界の決定問題が大世界の決定問題（閉システム）の文脈内で**開システム**とみなされるとき，開システムを一時的に閉じる技術の必要性が強調されている。

同じようなことがFishburnによっても言われている。彼によれば“…期待効用分析に入る前の事前決定分析（predecision analysis）に対する，いわゆる，客観的接近：すなわち，意思決定の状況において比較的重要，かつ，関連のある要因を認識する方法，それらが環境といかに相互作用を及ぼしあうかを理解する方法などの必要性を示している（Fishburn, 1972, p.30～31)。”
しかしFishburnも，Savage，Toda-Shuford と同様，小世界を具体的に構成する手法を提案していない。オペレーションズ・リサーチ，サイバネテイックス，システム分析などが事前決定分析に有益な，価値ある情報を与えるだろうと示唆されているにすぎない。

最後に，確実な結果と考えられているものに残っている不確実な要素あるいはリスク的要素が期待効用ではどのように処理されうるかについて注釈を与えよう。この点に関して，Savageは小世界の定式化においてつぎのように言う。“実際，最終的分析において，結果は，多分，決して近似されえないような理想的対象である。それゆえに，私はつぎのことを示唆する。典型的に孤立した決定問題では，不確実な結果をもたらすような行為が確実な結果をもたらすような行為の役割を果すことを我々は期待しなければならない。”（Savage, 1954, p.84)。" そのとき，第2章5－1節「線型効用関数と期待効用」で述べたように，“くじ”，$l=(\frac{1}{2}\cdot$新車，$\frac{1}{2}\cdot$中古車)，の期待効用を算定するためには，確実な結果，新車，中古車を確率1で与えるような“くじ”l(新)，l(中)を必要とした。

一方，新車，中古車には不確実な要因があるとしよう。そのとき，期待効用ではなく，**線型効用**（第2章5－1節「線型効用関数と期待効用」，参照），すなわち，

$$u\left(\frac{1}{2}\cdot l\ (\text{新}) \dotplus \frac{1}{2}\cdot l\ (\text{中})\right)=\frac{1}{2}u\ (l\ (\text{新}))+\frac{1}{2}u\ (l\ (\text{中}))$$

の性質から，もし“くじ”l(新)，l(中)の効用を意思決定者が決めることができるならば，そのとき，“くじ”lの効用は

$$u\ (l)=\frac{1}{2}u\ (l\ (\text{新}))+\frac{1}{2}u\ (l\ (\text{中}))$$

と算定される。

このようにして定まる$u\ (l)$は，不確実要素を含む新車，中古車の効用を基礎にしているゆえに，期待効用ではない。しかしl(新)，l(中)の効用を意思決定者が決めることができるならば，“くじ”lの効用算定にはなんら支障はない。問題となる点は新車，中古車に不確実要素が含まれているかどうかではなく，新車，中古車の効用を意思決定者が決定できるかどうかということである。

もし，Savageが言うように（我々も同意見であるが），確実な結果と考えられているものが高度に不確実であるとみなされるならば，そのとき，普通，期待効用といわれるものは存在しないことになる。したがって，期待効用と考えられているものは期待効用であるかのような顔付きをしているが，事実は，線型効用そのものである。

このような視点からみるとき，期待効用と線型効用の区別はあまり意味がないようにみえる。基数的効用としては，期待効用は理想的概念として以外にはその存在の意義を失い，線型効用がその機能を充分に果している。結論として，“くじ”の結果が有する不確実性は，その“くじ”の結果の効用が決定される

かぎり，“くじ”の効用の算定に問題を残さない。この点においては，期待効用定理の構造は結果として巧妙に出来上っている。

しかしながら，その巧妙さが罪作りであるようにみえる。すなわち，結果に残っている不確実性が重要であるとき，その不確実な結果の効用が決められたとしても，期待効用あるいは線型効用は意思決定者の選好と論理整合的でないかもしれない。これは第4章「期待効用理論の妥当性」で議論されてきたことから容易に理解されるであろう。

3. 制約された合理性における小世界

3－1　制約された合理性

意思決定者の情報処理能力に制約をとり入れた理論は“**制約された合理性**（bounded rationality)”の理論と呼ばれる。一方，**合理的行動**（rational behabior)の理論は所与の条件または所与の制約のもとで所与の目標を達成するような行動を記述することに意図がある（Simon,1982, 8－2, p. 409）。意思決定者の情報処理能力を制約する要因として，Simonはつぎのようなものを挙げる；(1) リスクと不確実性，(2) 選択対象についての不完全情報，(3) 計算の複雑性（Simon,1982, 8－2 ,p. 410）。“人生をいかに生きるべきか”という大世界における意思決定問題はこれら3つの要因を含んでいる。この大世界から孤立した小世界を構成する問題も一つの意思決定問題であろう。この意思決定問題は合理的行動の理論の対象ではない。なぜならば，意思決定者は世界の状態，結果，行為の全てについて不完全な情報を有するにすぎないからである。制約された合理性の理論は現実の複雑な世界における意思決定問題に関心を寄せる。孤立した小世界をいかに作り上げるかはそのような意思決定問題の一つである。

小世界はToda-Shufordが言うように開システムである。したがって，一般的には，開システムの要素は所与でなく，無数にあると言えるだろう。開シス

テムを閉システム，すなわち，孤立した小世界に変換するためには，意思決定者は開システムの要素を選択しなければならない。開システムの要素の数が巨大であることから言って，開システムの要素全てを比較検討することは困難である。

もしこの困難さを認めるならば，要素の取捨選択になんらかの規準が必要とされる。すなわち，適当なあるいは満足しうるような要素が見い出されたかどうかを決定する規準が使用されなければならない。意思決定においてこの機能を果す規準をSimonは**欲求水準**（aspiration level）と呼ぶ（Simon，1982，8－2，p. 415）。欲求水準を定め，その欲求水準によって適切と認められる要素が見い出されるまで探索を行い，そして要素を選択する過程は**満足化手続**（satisficing procedure）と呼ばれる。欲求水準は探索における成功と失敗に対して非常に敏感である。すなわち，欲求水準がしばしば達成されるならば欲求水準は引き上げられ，失敗がしばしば生じるならば欲求水準は引き下げられると言われている。

このような探索過程は，開システムにおける不確実性，複雑性，不完全性により，体系的に実行することが困難なものであろう。満足化手続における探索の効率を高めるものがあるとすれば，それは多分ヒュリスティックスの方法であろう。そして，前述のSavageの言，“それらは…判断と経験の問題であろう…”はヒュリスティックスを念頭においているようにみえる。

3－2　小世界とその影響

“くじ” $l=(\frac{1}{2}\cdot$新車，$\frac{1}{2}\cdot$中古車）を50万円で買うべきかどうかを意思決定者が判断しなければならないとき，期待効用理論では意思決定者の行為は“くじ” lを50万円で買うこと（これをa_1と記す），“くじ” lを買わないこと（これをa_2と記す）のどちらかとされる。しかしながら，行為a_2は50万円を保有することと解釈されるが，実際には行為a_2は，もし“くじ” lを50万円で買

わないならば，そのとき意思決定者がとりうる他の行為を含んでいる。例えば，有価証券を買うこと，台風にそなえて50万円を保有すること，家具などの耐久消費材を買うことなど全てがそれに含まれている。

すなわち，行為 a_2は50万円の世界を含む。そして，意思決定者が行為 a_1かa_2を選択する前に，50万円の世界が決定されなければならない。また，50万円の世界は“くじ” l の**機会費用**（opportunity cost)に関連するとも言える (Simon, 1982, 7 −11, p. 394)。

50万円の世界が満足化手続に従って決定されるとするならば，ある欲求水準により，50万円の世界における行為がある限定された時間内で探索される。この探索過程は全ての行為のほんの一部だけを見い出し，見い出された行為を不完全にしか記述しないだろう。浅く，できるだけ数多くの行為を探索すること，深く，見い出された行為をできるだけ記述することなど，探索努力の配分も欲求水準により定められるだろう。このようにして定められた小世界は行為 a_2に対する期待効用の算定に結びついている。

事実，満足化手続において“くじ” l を50万円で買うことよりも選好されるような行為が見い出されているとき，“くじ” l は買われないだろう。さもなくば，“くじ” l は買われるだろう。このように，“くじ” l を50万円で買うべきかどうかということは小世界の決定に依存している。そのとき，50万円の世界，新車の世界，中古車の世界がどのように決定されているかが行為の期待効用を定める。すなわち，小世界は意思決定者の選好を制約している。

“くじ” l の世界を定めるときの欲求水準が何であるかを具体的に指定することはできないが，今日の昼食に何を選ぶかは“くじ” l の世界と独立していると我々は考える。しかしながら，これは意思決定者の主観の問題である。自動車の取得は車の維持費，ガソリン代などにより彼の生活方式に影響を与え，したがって今日の昼食費用は自動車の取得，すなわち，“くじ” l と無関係ではないとみなされるかもしれない。意思決定者が小世界を構成する視点は行為，

世界の状態，結果，決定などの情報に関与している。

意思決定者によって認識される小世界は現実の世界とはかなり異なっている。したがって，小世界に対する意思決定者のモデルは現実の世界における全ての適切な特徴の中の，ほんのわずかの部分を占めているにすぎないかもしれない。このことは小世界が意思決定者の省略と偏りの産物であることを示している。この省略と偏りは，意思決定者の情報処理能力の限界により，避けられないことであるが，期待効用の定式化は，それらにより，意思決定者から，潜在的可能性を評価する機会，それを奪うことになる。

ある“くじ”は意思決定者の現在の選択対象の中では最も大きい効用を有する。しかしながら，意思決定者によって認識されている小世界は，省略と偏りからもたらされた不完全性から，将来のより良い機会を閉ざしているかもしれない。もし意思決定者が**将来のより良い機会**に充分大きな望みをたくしているか，将来のより良い機会を見落しているのではないかという不安を有するならば，そのような機会は具体的な“くじ”でなくとも，現在の意思決定に影響を与えるだろう。したがって，最も大きい効用を有する“くじ”といえども選好されないかもしれない。このような将来に対する希望は現在の選択対象の一つであることに間違いない。そしてそれはかなり重要な要素である（Hildreth，1974，p.119）。しかしながら，将来のより良い機会は意思決定者が具体的に期待効用を算定できる世界に存在しない。

小世界が意思決定にどのような影響を与えるかを，第4章3－1節「相互依存と選好 —— 例」における例題からみてみよう。

意思決定者の効用関数を $u(x)=\log x$ としよう。さらに，彼の小世界 E_s における決定問題は $\omega=100$ と“くじ” $l_1=(\frac{1}{2}\cdot 80, \frac{1}{2}\cdot 120)$ のどちらかを選択することであるとしよう。そのとき，

$$u(\omega)=4.605$$
$$u(l_1)=4.593$$

であるゆえに，$\omega = 100$ が選好される。

しかしながら，彼は，将来，ある“くじ” $l_2 = (p_1 \cdot x, p_2 \cdot (x+k))$ を受け入れなければならない。そして，“くじ” l_2 は，たまたま，小世界 E_s の構成において省略されている。彼は，本来，小世界 E_s より大きい世界 E_m で，$L_0 = \omega * l_2$ と $L_1 = l_1 * l_2$ に関する選好を考えるべきであったが，“制約された合理性”によって ω と l_1 に関する選好問題を作ってしまった。

もし $x = 60$, $x + k = 400$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.7$ であるならば，

$$u(L_0) = 5.8728,$$

$$u(L_1) = 5.8729$$

であるゆえに，“くじ” L_1 は“くじ” L_0 より選好される。

期待効用の視点から言えば，小世界 E_s で，“くじ” l_1 より ω を選好したことは，より大きい世界 E_m では，意思決定者が誤った方針を選んだことになる。将来に対する適確な見通しなしに小世界を決定することがいかに無謀であるかをこの例題は示している。

3－3　小世界と初期条件

我々が第6章まで問題としてきた初期条件も小世界の一部である。前述のように，確実であると考えられる金額も大世界の視点からは不確実であると言わねばならない。この不確実性の意味は第5章3節「初期条件の不確実性」における不確実性とは趣を，少々，異にしている。我々はいま手許に100万円をもっているとしよう。そのとき，5章3節では，その100万円は確実な金額であった。しかしながら，大世界の視点からはそれは確実ではない。すなわち，“Look before you leap”の原則は小世界において確実な結果の存在を認めない。

このような主旨から言えば，期待効用論者が金額の上で定義された効用関数の存在を仮定するとき，本来，不確実であるべき金額を確実とするような孤立した小世界が暗黙的に設定されているようにみえる。金額の効用はその金額の

世界を詳細に調べることなしに定められている。さらに，前述のように，金額の世界が未知であるとしても，その金額の効用が定められるかぎり，期待効用の算定に支障はない。しかしながら，50万円の世界に関する考察でみたように，このような孤立した小世界が常に妥当である根拠は見い出し難い。数百万円という年間所得の人にとっては，10円ないしは100円は確実な金額であると言えるかもしれないが，1,000万円ないしは1億円は上述の意味で確実であると言えないだろう。この議論はあまりにも細部にとらわれているという主張があるかもしれない。しかしながら我々はそうでないと考えられるケースの存在を信じている。意思決定者にとって**重要な決定問題**がそれである。

例えば，ある企業が450億円を投資して新しい百貨店の店舗を開くべきかどうかを検討しているとしよう。そのとき，しばしばみられるように（例えば，Schlaifer, 1969），期待効用ではこれは450億円と（新しい店舗による収益の）“くじ”のどちらを選ぶべきかという決定問題に定式化されるだろう。

普通，企業は450億円もの大金を銀行の普通預金として寝かしているようなことをなしてはいない。450億円は，増資，有価証券の売却，銀行からの借入，手持ち店舗の売却など，いくらかの手段で調達される。増資が額面株で発行される限り，資金の予測に狂いは少ないが，株式の時価発行では調達される資金は確実でない。有価証券の価格は，時々刻々，変化する。銀行からの借入では一般経済情勢により利子率が異なる。店舗の売却価格も安定していないだろう。このように，資金調達時点における450億円はリスク的または不確実な要因を含んでいる。

さらに，調達されうる450億円が新しい店舗への投資に限られるべき理由はない。手持の店舗を改装，拡大すること，関連会社に融資すること，POS（販売時点情報管理）などの管理設備の導入，等々，いくつかの資金利用可能性がある。そして，それらによる利益貢献と償却負担などが考慮されなければならない。さらに，それらが企業の将来にひき起す世界の状態，結果，ならびに，

これらに起因すると考えられる決定など全てが450億円に関連する。

450億円を確実な金額とする小世界は現実の450億円の世界と大きく異なっている。450億円はある意味で現実の450億円の世界と似ていると言えるかもしれないが，その詳細において多くの部分を欠いている。期待効用論者にもつぎのような指摘がある；“意思決定者にとっての金額の効用が，彼の現在の状況，決定のための条件，彼の決定が将来に対して持っている意味，そしてリスクに対する彼の態度によって条件づけられていることを我々は心にとめておくべきである（Fishburn，1968，p. 357)。”しかしながら，この小世界に関連する事項が期待効用にどのような効果を及ぼすかについて言及がみられないところから判断すると，この問題に対する認識はそれほど深くないとみなされる。

初期条件が確実であるとする仮定に対して我々が疑念をもつ根拠はここにもある。言うまでもなく，初期条件が確実であるか，リスク的であるか，不確実であるかは小世界を意思決定者がどのように認識するかに依存する。しかしながら，その**認識の程度**によっては，期待効用が意図している首尾一貫した決定など，現実的な意味で，霧散してしまうかもしれない。

第８章　期待効用の諸公理系

1. は じ め に

期待効用の公理系は数多く展開されているが，それらに含まれる公理はつぎの４つの類のどれかにぞくする；⑴　弱順序の公理の類，⑵　連続性の公理の類，⑶　独立性の公理の類，⑷　構造の公理の類。上記の類の中で，⑴，⑵，⑶の公理の類が意思決定者の選好行動に関連しており，期待効用概念の基礎となっている。

弱順序の公理の類に関して言えば，ほとんどの期待効用の公理系では弱順序の公理が使われているが，例外として Von Neumann-Morgenstern の公理系では選択対象の集合の性質から全順序の公理が使われている。連続性の公理の類にはアルキメディアン公理と連続性の公理が含まれており，これら２つの公理のどちらかが期待効用の公理系では用いられている。なお，Herstein-Milnor の公理系では，連続性の公理と呼ばれてはいるが，多くの期待効用の公理系における連続性の公理とは異なった形の公理が採用されている。

独立性の公理の類には，独立性の公理，絶対確実の原則，代替性の公理，単調性の公理が含まれている。独立性の公理の類にぞくする全ての公理を一括して独立性の公理と呼ぶこともある（Fishburn,1979,p. 247）。本章で収録されている独立性の公理以外に，形の異なる独立性の公理もある（Fishburn,1979, p. 247）。絶対確実の原則にはとくに変った形のものはないが，代替性の公理に関しては Herstein-Milnor の公理系で半々くじに相当する最も単純な形の代替性の公理が使われている。単調性の公理そのものが単独で公理系において用いられているケースは見当らないが，これはほとんど絶対確実の原則に等しい（付録４の定理16，参照）。

期待効用の公理系では，弱順序の公理の類，独立性の公理の類，連続性の公理の類の各類の中から少なくとも一つの公理が使われている。したがって，各類の中からどれを選ぶかによって種々の公理系が考えられる。

本章で議論される諸公理系は，Von Neumann-Morgensternの公理系ＶＭ（1947），Marschakの公理系Ｍ（1950），Herstein-Milnorの公理系ＨＭ（1953），Fergusonの公理系Ｆ（1967），Luce-Raiffaの公理系ＬＲ（1957），Blackwell-Girshickの公理系ＢＧ（1954）である。

上で述べたように期待効用の公理にはいくつかのタイプが存在するが，本章でとりあげられた諸公理系にはその他の公理系で使われている諸公理の典型が含まれている。例えば，紙数の都合で省かれたが，Fishburn (1970, p.107）の公理系では，本章の５節における式（８．17）で表現された独立性の公理，アルキメディアン公理，弱順序の公理から成り立っており，Holloway (1979, p.439）の公理系は公理系ＬＲから公理ＬＲ５を省いたものであり（公理系ＬＲの冗長性に関しては本章，６－２節，参照），DeGroot (1970, p.101）の公理系は弱順序の公理，アルキメディアン公理，公理系Ｆの公理Ｆ２において選好関係$\succsim$の代りに$\succ$が使われた独立性の公理（弱順序の公理を考慮に入れるときこれは公理Ｆ２そのものである）から構成されている。

本章では，諸公理の典型を含めるという点から，また選択対象の集合が異なるという点から期待効用の諸公理系をとりあげ，我々の批判的視点たる初期条件が考慮されているかどうかを調査する目的で諸公理系を吟味しよう。とくに，付録４「諸公理系の同値性」と第９章「公理系の評価」における議論の前提として，諸公理系の特徴，それらに含まれる諸公理の特徴，意味などを解説しよう。

2. Von Neumann-Morgenstern の公理系

２－１　公理系ＶＭ

抽象的な対象a，b，c，…からなる集合をSとしよう。そしてこの集合S

では，選好関係

$$a \succ b$$

と演算

$$\alpha a + (1-\alpha) b = c, \ \alpha \in (0, 1)$$

が所与とされる。そのとき，演算$\alpha a + (1-\alpha) b$は確率αでaが生じ，確率$(1-\alpha)$でbが生じることを意味する。換言すれば，$\alpha a + (1-\alpha) b$は“くじ”$(\alpha \cdot a, (1-\alpha) \cdot b)$と解釈される。したがって，この演算における記号＋は実数やベクトルに対する**加算記号でない**ことに注意されたい。

公理ＶＭ１（全順序）：集合Sの要素に関する選好関係$\succ$は全順序である。すなわち，⑴ 連結性，任意のa，$b \in S$に対して，つぎの３つの関係，$a \succ b$，$a \sim b$，$b \succ a$のどれか一つだけが成立する。⑵ 推移性，全てのa，b，$c \in S$に対して，$a \succ b$かつ$b \succ c$であるならば，$a \succ c$が成立する。
⑶ 歪対称性，全てのa，$b \in S$に対して，$a \succsim b$かつ$b \succsim a$ならば，$a = b$が成立する。

公理ＶＭ２（**絶対確実の原則**－Surething principle）：もし任意のa，$b \in S$に対して，$a \succ b$ならば，任意の$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$a \succ \alpha a + (1-\alpha) b$$

かつ

$$\alpha a + (1-\alpha) b \succ b$$

が成立する。

公理ＶＭ３（**アルキメディアン**－Archimedean）：もし任意のa，b，$c \in S$に対して，$a \succ b$かつ$b \succ c$であるならば，

$$b \succ \alpha a + (1-\alpha) c$$

かつ

$$\beta a + (1-\beta) c \succ b$$

なるα，$\beta \in (0,1)$ が存在する。

公理VM４（結合の代数－Algebra of combining）：任意のa，$b \in S$，任意のα，$\beta \in (0,1)$ に対して

$$\alpha a + (1-\alpha) b = (1-\alpha) b + \alpha a \tag{8.1}$$

かつ

$$\alpha(\beta a + (1-\beta) b) + (1-\alpha) b = \alpha\beta a + (1-\alpha\beta) b \tag{8.2}$$

が成立する。

定理８．１（Von Neumann-Morgenstern の期待効用定理）．a，$b \in S$に対して

$$u(a) > u(b) \Longleftrightarrow a \succ b \tag{8.3}$$

$$u(\alpha a + (1-\alpha) b) = \alpha u(a) + (1-\alpha) u(b), \quad \alpha \in (0,1) \tag{8.4}$$

であるような関数uが存在するための必要充分条件は公理ＶＭ１，ＶＭ２，ＶＭ３，ＶＭ４が成立することである。

さらに，式（８．３），（８．４）を満たす関数uは正の線型変換まで一意的である；すなわち，関数uとは異なる関数vが式（８．３），（８．４）を満たすための必要充分条件は全ての$a \in S$に対して

$$v(a) = \delta u(a) + \gamma$$

であるような数，$\delta > 0$とγが存在することである（Von Neumann-Morgenstern ,1947, p. 24）。

公理ＶＭ１，公理ＶＭ２，公理ＶＭ３，公理ＶＭ４から構成される Von Neumann-Morgenstern の公理系を**公理系ＶＭ**と呼ぼう。

２－２　公理系ＶＭに対する注釈

公理系ＶＭでは集合Sは単なる対象を要素としているが，Von Neumann-Morgenstern はこの対象の背後に順序効用（定義２．８，参照）を念頭においている（Von Neumann-Morgenstern, 1947, p.26, 脚注１）。事実，彼らは順序効用で公理系を説明している。もし結果の集合Xの要素x_a，x_bに対して意思決定者が，それぞれ，順序効用a，bを付与することができるならば，それらのa，bは集合Sの要素となる。以下ではSを順序効用の集合として議論しよう。

そして，演算 $\alpha a+(1-\alpha)b=c$ が所与であるということは，対象a，bの結合$\alpha a+(1-\alpha)b$に対して，$\alpha a+(1-\alpha)b=c$ となるようなcが集合Sに存在することを意味する。数学的に言えば，集合Sはこの演算に関して閉じている。そのとき，$\alpha a+(1-\alpha)b=c$ におけるcも順序効用となる。結合$\alpha a+(1-\alpha)b$は“くじ”（$\alpha\cdot a$，$(1-\alpha)\cdot b$）と解釈されうるゆええに，対象cは“くじ”（$\alpha\cdot a$，$(1-\alpha)\cdot b$）に付与された順序効用でもある。

集合Sが順序効用の集合であるゆえに，集合Sの任意の要素は一つの数値となる。したがって，順序効用の集合Sにおける選好関係は無差別関係～より強い恒等関係＝の成立を要請する。形式的な便宜上，公理ＶＭ１では無差別関係の記号～が使われているが，公理系ＶＭでは記号～の代りに記号＝で公理系を記述することも可能である。また，選好関係の記号$\succsim$の代りに記号$\geq$（実数の不等号）で処理することも可能である。事実，Von Neumann-Morgensternは記号$>$，＝だけを使っている。結果x_a，x_bに対して$x_a\sim x_b$であることは，公理系ＶＭでは，対象a，bに対して$a=b$であることが対応している。

本章で，以下に掲げる諸公理系は弱順序であるのに反して，Von Neumann-Morgenstern では全順序である点が，少々，異なっている。容易に理解されるように，これは順序効用，すなわち，実数の性質から生じる結果である。さて，演算$\alpha a+(1-\alpha)b=c$においてαは区間（０，１）の要素とされてい

る。すなわち，$\alpha=1$ ないしは $\alpha=0$ は許されていない。しかし，結合 $\alpha a+(1-\alpha)b$ は“くじ”（$\alpha\cdot a$，$(1-\alpha)\cdot b$）と解釈されうるゆえに，$\alpha=0$ のとき結合 $\alpha a+(1-\alpha)b$ は b を確率1で与える“くじ”とみなすことができる。したがって，同様に，$\alpha=0$ ならば，$\alpha a+(1-\alpha)b=b$ と定義される。そのとき，公理ＶＭ４が考慮されるならば，集合 S は混合集合となる。いま，これを示そう。

結合 $\alpha a+(1-\alpha)b$ を $\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b$ と表現しよう。そのとき，全ての a，$b\in S$ と全ての $\alpha\in[0,1]$ に対して $\alpha a+(1-\alpha)b=c$ となるような c が集合 S に存在することから，全ての a，$b\in S$ と全ての $\alpha\in[0,1]$ に対して $\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b\in S$ となる。これは混合集合の条件Ｍ１に対応している。

公理ＶＭ４の前半の部分は

$$\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b=(1-\alpha)\cdot b\dot{+}\alpha\cdot a$$

を意味している。これは混合集合の条件Ｍ２に対応している。そして，同様に，公理ＶＭ４の後半の部分は混合集合の条件Ｍ３に対応している。また，混合集合の条件Ｍ４に対応する部分は，もうすでに，上で示された。

したがって，集合 S は条件Ｍ１，Ｍ２，Ｍ３，Ｍ４を満たす。集合 S が混合集合とみなされるとき，Von Neumann-Morgenstern の公理系は公理ＶＭ１，ＶＭ２，ＶＭ３から構成されることになる。

以下，簡単に公理ＶＭ１，ＶＭ２，ＶＭ３の内容を説明しよう。

1）公理ＶＭ１（全順序）。結合 $\alpha a+(1-\alpha)b$ は“くじ”（$\alpha\cdot a$，$(1-\alpha)\cdot b$）に対応し，“くじ”（$\alpha\cdot a$，$(1-\alpha)\cdot b$）は“くじ”（$\alpha\cdot x_a$，$(1-\alpha)\cdot x_b$）に対応している。ただし，x_a，$x_b\in X$ で，a，b は，それぞれ，x_a，x_b の順序効用である。したがって，集合 S は結果の集合 X の上で定義された“くじ”の集合 Ω の要素に対する順序効用から構成されている。この順序効用は集合 Ω の要素に対して意思決定者が与える選好順位を示す数値であ

る。それゆえに，集合S上で全順序が成立する。

2） 公理VM2（絶対確実の原則）．もし任意のa，$b \in S$に対して$a \succ b$ならば，全ての$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$\alpha a + (1-\alpha)\ b \succ b$$

が成立することを公理VM2は要求する。結合$\alpha a + (1-\alpha)\ b$は確率αでaが生じ，確率$(1-\alpha)$でbが生じることを示すゆえに，aが生ずれば，bは生じない。そしてbが生じるならば，そのときaは生じない。すなわち，aが生じる事象Aとbが生じる事象Bは互いに排反的な事象である。

したがって事象Aが生じることを意思決定者が知っているならば，そのとき意思決定者はbよりも結合$\alpha a + (1-\alpha)\ b$を選好するだろう，すなわち

$$\alpha a + (1-\alpha)\ b \succ b$$

となるであろう。事象Bが生じることを意思決定者が知っているならば，そのとき

$$\alpha a + (1-\alpha)\ b = b$$

となるであろう。以上を要約すると，事象Aの確率αが正であるかぎり，bよりも選好されるaが生じる可能性，すなわち，正の確率αを有することだけ，結合$\alpha a + (1-\alpha)\ b$はbよりも選好される。

3） 公理VM2が，ここでは，Jensenに因んで絶対確実の原則（surething principle）と名付けられているが，その謂れは，Savageにその源を求められるからである（Jensen ,1967,p. 174)。本来，Savageが提唱した絶対確実の原則の意味はVon Neumann-Morgensternの文脈ではつぎのような内容である；「事象Aが生じる確率$P(A)$をα，事象Bが生じる確率$P(B)$を$(1-\alpha)$としよう。すなわち，事象Aと事象Bは排反的であるとしよう。そして，a，b，c，d，f，$g \in S$に対して2つの関係，

$$f = P(A)\ c + P(B)\ a \qquad (8.5)$$

$$g = P(A)\ d + P(B)\ b \qquad (8.6)$$

が成立しているとしよう。事象Aが生じたとき意思決定者の選好は$f \succsim g$であり，事象Bが生じたとき同様に$f \succsim g$であるならば，そのとき彼の選好は無条件に$f \succsim g$となる。さらに，（事象Bの確率$P(B)$が正であるという条件のもとで）事象Bが生じたとき，彼がgよりもfを選好し，かつ，事象Aが生じたとき，彼がfよりもgを選好することはないならば，そのとき彼は無条件にgよりもfを選好する（Savage,1954,p. 21)。」

形式的には，P 2（postulate 2の意味）の前提のもとでP 3と論理的に同値な定理3（原書の番号）としてこの原則は与えられている（Savage ,1954 , p. 26)。このSavageの絶対確実の原則における後半の部分を形式的に書き換えると，$P(B)>0$に対して事象Bが所与であるとき，$f \succ g$，すなわち，$a \succ b$，かつ，事象Aが所与であるとき，$f \succsim g$，すなわち$c \succsim d$であるならば，そのとき

$$f \succ g$$

が成立する。

いま，$c=d=a$とおくならば，式（8．5)，（8．6）から

$$f'=P(A)\ a+P(B)\ a$$
$$g'=P(A)\ a+P(B)\ b$$

が得られる。このf'，g'に絶対確実の原則を適用するとき，

事象Aでは，$f' \sim g'$，すなわち，$a \sim a$，

かつ，

事象Bでは，$f' \succ g'$，すなわち，$a \succ b$

であるならば，そのとき，$P(B)>0$に対し

$$f' \succ g'$$

となる。すなわち，

$$P(A)\ a+P(B)\ a \succ P(A)\ a+P(B)\ b$$

となる。したがって，$a=P(A)\,a+P(B)\,a$と表現し，a　bならば，任意の$\alpha\in(0,1)$に対して

$$a\succ\alpha a+(1-\alpha)\,b \qquad (8.7)$$

が成立する。

式（８．７）は公理ＶＭ２の成立を意味している。ただし，式（８．７）に限定するかぎり，Savage の絶対確実の原則は$\alpha=0$のケースを含むが，公理ＶＭ２では，$\alpha=0$のとき

$$\alpha a+(1-\alpha)\,b\succ b$$

が成立しないことに注意されたい。

4) 公理ＶＭ３（アルキメディアン）。対象aが対象bより選好され，かつ対象bが対象cより選好されるならば，そのとき，結合$\alpha a+(1-\alpha)\,c$は，確率αが充分に大きいとき，対象bより選好される。また，確率αが充分に小さいとき，対象bはこの結合より選好される。これが公理ＶＭ３の内容である。

さて，自動車の大型車，中型車，小型車の順序効用を，それぞれ，a（大），b（中），c（小）としよう。いま，a（大）$\succ b$（中）$\succ c$（小）であるとき，

$$\alpha a\,(\text{大})+(1-\alpha)\,c\,(\text{小})\succ b\,(\text{中}) \qquad (8.8)$$

なるαの存在が公理ＶＭ３によって要求されている。結合αa（大）$+(1-\alpha)$ c（小）は，$\alpha\in(0,1)$では，b（中）より選好されないc（小）が起る可能性を有している。しかし，その可能性$(1-\alpha)$が極度に小さいならば，そのとき式（８．８）はこの結合とb（中）に関する選好の表現ではあるが，c（小）の可能性$(1-\alpha)$が無視され，a（大）とb（中）に関する選好関係が重視されるだろう。すなわち，結合αa（大）$+(1-\alpha)$ c（小）とb（中）に関する選好は，確率$(1-\alpha)$が極度に小さいとき，実質的にはa（大）とb（中）におけるそれになるだろう。

5) しかしながら，自動車ではなくて，最も忌み嫌われるべき死が選択対象で

あるとき，公理ＶＭ３の成立に疑問が生じるかもしれない。いま，死の順序効用をd（死）としよう。そのとき，結合αa（大）＋（１－α）d（死）において，確率（１－α）が極度に小さいとき，公理ＶＭ３は

$$\alpha a\text{（大）} + (1-\alpha)\, d\text{（死）} \succ b\text{（中）} \qquad (8.9)$$

の成立を要求する。式（８．９）の成立は不当であると考える人々がいるかもしれないが，日常生活においてはこの要請を満たすような行動が，普通，とられている。

例えば，外出には交通事故による死の可能性がある。それにもかかわらず，人々は外出が生みだす便益を求めて行動する。それは，通常，事故死の可能性が非常に小さいとみなされているからであろう。したがって，外出という行動は忌み嫌われるべき死の可能性をともなうが，その可能性が極度に小さいためにそれが生みだす便益にもとづいて価値判断されているようにみえる。

このように，公理ＶＭ３は絶対的に忌み嫌われるべき選択対象の存在を許さない。逆に絶対的に愛好されるような選択対象の存在も許さない。

公理ＶＭ３は実数のアレキメデスの性質（Archimedian property）との対応から**アルキメディアン**と呼ばれる，正の数xがいかに小さくとも，正の数yがいかに大きくとも，

$$nx > y$$

となるような正の整数nが存在すること，これがアルキメデスの性質である。これは任意の２つの正の数が比較可能あるいは連結的であることを意味している。したがって，公理ＶＭ３（アルキメディアン）では結合αa（大）＋（１－α）d（死）に非常に小さな順序効用d（死）が含まれていようとも，この結合がb（中）より選好されるような$\alpha \in$（０，１）が存在する。経済学的に言えば，公理ＶＭ３は全ての財には価格が付与されうることと同様な内容を有している。

3. Marschak の公理系

3－1　公理系M

集合Sは有限個の点の集合Xの上で定義された確率ベクトルの集合としよう。

公理M１（弱順序）：集合Sの要素に関する選好関係$\succsim$は弱順序である。すなわち，(1) 連結性と (2) 推移性が成立する。

公理M２（代替性）：もしa，$a' \in S$に対して$a \sim a'$であるならば，そのとき全ての$b \in S$と全ての$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$\alpha a + (1-\alpha) b \sim \alpha a' + (1-\alpha) b$$

が成立する。

公理M３（連続性）：もしa，b，$c \in S$に対して$a \succ b \succ c$ならば，そのとき，

$$b \sim \alpha a + (1-\alpha) c$$

なるような$\alpha \in (0, 1)$が一意的に存在する。

公理M４（構造）：集合Sには$a \succ b$あるいは$b \succ a$であるような要素a，bが存在する。

確率ベクトル$a = (p_1, p_2, \cdots, p_r)$は結果ベクトル$x = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$の上で定義されているとしよう。確率ベクトル$a$に関する関数$u$の期待値$E(u, a)$は

$$u(a) = E(u, a) = \sum_{i=1}^{r} p_i u(x_i)$$

と定義される。

定理８．２（Marschak の期待効用定理）. a，$b \in S$に対して

$$a \succ b \Longleftrightarrow u(a) > u(b) \qquad (8.10)$$

であるような関数uが存在するための必要充分条件は公理M 1，M 2，M 3，M 4が成立することである。

さらに，式（8 . 10）を満たす関数uは正の線型変換まで一意的である（Marschak ,1950）。

公理M 1，公理M 2，公理M 3，公理M 4から構成されるMarschakの公理系を**公理系M**と呼ぼう。

3－2　公理系Mに対する注釈

第2章3－2節「確率ベクトルと単純確率分布」において“くじ”と確率ベクトルの対応関係が述べられた。そしてMarschakの公理系は弱順序，代替性，連続性の諸公理ならびに構造の仮定である公理M 4から成り立っている。一方，第3章2節「期待効用定理」では，選択対象は“くじ”であるが，弱順序，代替性，連続性の諸公理からなる公理系について述べられた。したがって，構造上の公理M 4を除くとき，“くじ”と確率ベクトルの対応関係からMarschak の公理系は第3章2節の公理系に完全に対応している。弱順序，代替性，連続性の公理に関する解釈については第3章2節を参照されたい。ここでは，Von Neumann-Morgenstern の公理系とMarschak の公理系について比較，検討しよう。

1）公理系V Mでは選択対象は順序効用であり，公理系Mではそれが確率ベクトルである。確率ベクトルでは歪対称性が成立しないゆえに，選好関係は公理系V Mでは全順序であるのに対して，公理系Mではそれが弱順序である。

2）記号＋は，公理系V Mでは混合集合の演算$\dot{+}$，・と同じ解釈をしなければならないが，公理系Mではベクトルとスカラーに関する加算，乗算におけるような普通の意味として使われている。その点では，Marschak の公理系は直観的に理解容易である。ただし，第2章3－3節「混合集合」において述べられたように確率ベクトルの集合は混合集合であるゆえに，記号＋がこの公理系で

も混合集合の演算と解釈されることにはなんら支障はない。

3) 公理系ＶＭにおける結合 $\alpha a+(1-\alpha)b$ は，実質的には，“くじ” $l=(\alpha\cdot a, (1-\alpha)\cdot b)$ を意味している。一方，確率ベクトルは“くじ”に対応している。したがって，公理系ＶＭ，公理系Ｍの両者とも“くじ”に関する期待効用の公理系と考えられる。

4) 代替性の公理Ｍ２と絶対確実の公理ＶＭ２を比較するとき，数値における大小関係では等号は不等号よりきびしい制約であるというような意味で，代替性の公理は絶対確実の公理よりきびしい条件である。

5) 結果の集合 X の要素に対する順序効用は公理系Ｍにおける単位ベクトルに対応する。例えば，結果ベクトルを $x=(x_a, x_b, x_c)$，$x_a, x_b, x_c\in X$ としよう。そのとき，x_a, x_b, x_c が確率１で生じる確率ベクトルは，それぞれ，$(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ となる。このように，これらの単位ベクトル $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ と順序効用 a，b，c は結果 x_a, x_b, x_c に対応している。

6) 構造上の公理Ｍ４は集合 S には無差別でない要素が少なくとも二つ存在することを要請している。

一方，Von Neumann-Morgenstern の公理系にはこの種の公理はない。しかし，つぎのような脚注が示されている；“厳密に言って，公理系は二つの異った順序効用が存在しない可能性を認めている。この可能性はほとんど興味をひくものでないが，それは容易に処理される（Von Neumann-Morgenstern, 1947, p. 627)。”事実，集合 S の要素が全て同じ（Marschak の公理系では無差別）であるならば，集合 S 上で定義された効用関数を見い出す問題は集合 S の全ての要素 a に対して一定値を与える関数，例えば $u(a)=1$ を定義することによって解決される。我々がとり挙げた諸公理系においてこの種の仮定を公理として掲げるものは Marschak の公理系のみである。

7) 公理系Ｍには公理ＶＭ４（給合の代数）に相等するものはない。結合 αc

＋（1－α）bにおける結合の対象cがまた$c=\beta a+$（1－β）bと定義された結合であるとき，2段階の結合α（$\beta a+$（1－β）b）＋αbが一段階の結合$\alpha\beta a+$（1－$\alpha\beta$）bと等しいこと，これが公理ＶＭ４の後半部分の内容であった。しかしながら，2段階の構成からなる結合が一段階の結合と等しい，あるいは，無差別であることはギャンブル的な要素をできるだけ避けようとする人々，あるいは，それを特に好む人々にとって認めがたいことであるかもしれない。この点に関する Von Neumann-Morgenstern の見解によると，彼らの公理系にはギャンブルの効用は含まれていないとされている（ Von Neumann-Morgenstern ,1947 , p. 28）。

一方，Marschak の公理系では選択対象が確率ベクトルであるゆえに，結合$\alpha a+$（1－α）bは単なるベクトル演算として算定される。したがって

$$\alpha a+(1-\alpha)b=(1-\alpha)b+\alpha a$$

$$\alpha(\beta a+(1-\beta)b)+(1-\alpha)b=\alpha\beta a+(1-\alpha\beta)b$$

が成立する。このように，ベクトル演算の使用そのものが公理ＶＭ４の成立を仮定していることになる。すなわち，ベクトル演算あるいは確率演算が Marschak の公理系では選好行動において暗黙的に正当とされている。

4. Herstein-Milnor の公理系

4－1　公理系ＨＭ

集合Sは混合集合としよう。

公理ＨＭ１（弱順序）：集合Sの要素に関する選好関係$\succsim$は弱順序である。すなわち，(1) 連結性と (2) 推移性が成立する。

公理ＨＭ２（代替性）：もしa，$a'\in S$に対して$a\sim a'$ならば，そのとき全ての$b\in S$に対して

$$\frac{1}{2}\cdot a \dot{+} \frac{1}{2}\cdot b \sim \frac{1}{2}\cdot a' \dot{+} \frac{1}{2}\cdot b$$

が成立する。

公理系ＨＭ３（連続性）：全てのa，b，$c \in S$に対して集合Aと集合B，すなわち，

$$A = \{\alpha \mid \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha)\cdot b \succsim c\}$$

と

$$B = \{\alpha \mid c \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha)\cdot b\}$$

は閉集合である。ただし$\alpha \in [0,\ 1]$である。

定理８．３（Herstein-Milnor の線型効用定理）．a，$b \in S$と全ての$\alpha \in [0, 1]$に対して

$$u(a) > u(b) \Longleftrightarrow a \succ b \tag{8.11}$$

$$u(\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha)\cdot b) = \alpha u(a) + (1-\alpha) u(b) \tag{8.12}$$

であるような関数uが存在するための必要充分条件は公理ＨＭ１，ＨＭ２，ＨＭ３が成立することである。

さらに，式（８．11），（８．12）を満たす関数uは正の線型変換まで一意的である（Herstein- Milnor, 1953)。

公理ＨＭ１，公理ＨＭ２，公理ＨＭ３から構成される Herstein-Milnor の公理系を**公理系ＨＭ**と呼ぼう。

４－２　公理系ＨＭに対する注釈

１）結果の集合Xが有限個の要素を含むとき，確率ベクトルに関する効用関数は Marschak の公理系で取り扱われた。これに対して，Herstein-Milnor の公理系は要素の数が有限でないケースに拡張する意図で作られた。一方，Blackwell-Girshick の期待効用定理にみられるように，無限集合Xで定義された離

散的確率分布に対する効用関数は有界（bounded）となる。この有界性は Herstein-Milnor (1953)では議論されていない（Fishburn, 1967）。

このような意味から言って，Herstein-Milnor は混合集合の上で定義された線型効用関数を導きだしてはいるが，必ずしも，混合集合の上で定義された期待効用を確立しているわけではない。もちろん，Herstein-Milnor は線型効用関数の議論に限定してはいるが，本来の目的である無限集合での期待効用には未解決の問題が残っていた。

2）しかしながら，いままで述べてきたように，第３章における"くじ"の集合，Von Neumann-Morgenstern における順序効用の集合，Marschak における確率ベクトルの集合，これらはいずれも混合集合であった。したがって，これらの上で定義される線型効用関数は Herstein-Milnor によって導出された線型効用関数の特殊な場合であると言える。

さらに，"くじ" の集合，Von Neumann-Morgenstern の順序効用の集合，Marschak における確率ベクトルの集合がいずれも有限個の要素を有する結果の集合Xにもとづいているとき，期待効用は Herstein- Milnorの線型効用関数によって定義される。また，本章における期待効用定理の諸公理系は，付録４で示されているように，混合集合の条件のもとでは定式化における外見上の相違にもかかわらず同値である。このような意味で，Herstein-Milnor の定式化は結果の集合Xが有限個の要素を有するときの期待効用定理における一般化とみなされる。

3）公理ＨＭ２はつぎのような内容を主張する；もしaとa'の選好に関して意思決定者が無差別であるならば，そのとき，全てのbに対して，選択対象a，bの半々くじ$l=(\frac{1}{2}\cdot a, \frac{1}{2}\cdot b)$と選択対象$a'$，$b$の半々くじ$l'=(\frac{1}{2}\cdot a', \frac{1}{2}\cdot b)$の選好に関して意思決定者はまた無差別である。線型効用関数の存在を証明する過程で，Herstein-Milnor は Marschak の公理Ｍ２（代替性）に対応する定理（原書の定理２）を導きだしている（Herstein-Milnor, 1953,p.294）。

すなわち，$a \sim a'$なるようなa'，$a \in S$に対して，全ての$b \in S$について

$$l = (\frac{1}{2} \cdot a, \frac{1}{2} \cdot b) \sim l' = (\frac{1}{2} \cdot a', \frac{1}{2} \cdot b)$$

が成立することは，全ての$\alpha \in [0, 1]$に対して，

$$l_1 = (\alpha \cdot a, (1-\alpha) \cdot b) \sim l_1' = (\alpha \cdot a', (1-\alpha) \cdot b) \qquad (8.13)$$

なることを公理系HMとして要請している。

ここで，“公理系HMとして”という意味は公理HM1，HM2，HM3の成立が式（8.13）を要請しているのであって，公理HM2だけがこの結論を指していることではないということである。一方，式（8.13）において$\alpha = \frac{1}{2}$のとき，公理HM2が生じる。このように，公理M2（代替性）の特殊形が公理HM2であると言うことができる。

そして，このMarschak型の代替性を通じて証明の過程は進められているゆえに，証明の過程を単純化するために式（8.13）の形式が公理HM2の代りに公理として使われうる。しかしながら，公理HM2は半々くじという驚くべき簡明性，あるいは，直観的な理解容易性を有する。そこで，Herstein-Milnorは言う；“一般性と直観的な理解容易性における公理HM2の利点(gain)は結果として生じる数学的な（証明の）複雑さに，充分，値すると我々は感じている（Herstein-Milnor, 1953, p.294, 脚注)。”

4) 集合$A = \{ \alpha \mid \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c \}$が閉集合であることは集合$A$の要素$\alpha_i$から構成される点列$\{ \alpha_i \}$が$\alpha$に収束するならば，そのとき極限値$\alpha$が集合$A$の要素であることを意味する。すなわち，もし

$$\lim_{i \to \infty} \alpha_i = \alpha$$

かつ

$$\alpha_i \cdot a \dot{+} (1-\alpha_i) \cdot b \succsim c$$

ならば，そのとき

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c$$

となる。集合$B = \{ \alpha \mid c \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \}$に関してもそれは同様

である。公理HM3（連続性）の内容はこれである。

関数$f(x)$が$x=x_1$のとき一つの定まった値$f(x_1)$を有し，かつ，$\lim_{x \to x_1} f(x)=f(x_1)$なるとき，関数$f(x)$は$x=x_1$において連続であると言われる。そして関数$f(x)$が区間Ｉにぞくする全ての$x$に対して連続であるときには，区間Ｉにおいて関数$f(x)$は連続であると言われる。この関数の連続性に関する定義の類推から公理HM3の連続性に対する解釈が得られる。

公理HM3における連続性の意味は意思決定者の選好関係$\succsim$が連続であるということである。すなわち，選好関係$\succsim$があるαにおいて

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c$$

を成立させ，

$$\lim_{i \to \infty} \alpha_i = \alpha$$

と

$$\alpha_i \cdot a \dot{+} (1-\alpha_i)\ b \succsim c$$

が

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c$$

を意味するならば，そのとき選好関係$\succsim$はαにおいて連続であると言える。そして，選好関係$\succsim$が全ての$\alpha \in A$に対して連続であるとき，区間Aにおいて選好関係$\succsim$は連続であると定義される。この選好関係$\succsim$の連続性の定義は集合$A=\{\alpha \mid \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c\}$が閉集合であることそのものである。

この議論から理解されるように，Von Neumann-Morgenstern におけるアルキメデスの公理，Marschak における連続性の公理など，いずれも選好関係の性質を規定していることが判明する。

5. Ferguson の公理系

5－1　公理系Ｆ

集合Sは単純確率分布（simple probability distribution）の集合としよう。

ただし，集合Sの要素は有限個の結果から構成された集合Xの上で定義された確率分布である。そしてa，$b \in S$と$\alpha \in [0, 1]$に対して$\alpha a + (1-\alpha) b$は部分集合A（$\subset X$）の確率が$\alpha a(A) + (1-\alpha) b(A)$であるような確率分布である。

公理F1（弱順序）：集合Sの要素に関する選好関係$\succsim$は弱順序である。すなわち，(1) 連結性と (2) 推移性が成立する。

公理F2（**独立性**－ Independence）：a，b，$c \in S$と全ての$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$\alpha a + (1-\alpha) c \succsim \alpha b + (1-\alpha) c$$

なるための必要充分条件は$a \succsim b$である。

公理F3（アルキメディアン）：もしa，b，$c \in S$に対して$a \succ b \succ c$ならば，そのとき

$$\alpha a + (1-\alpha) c \succ b$$

かつ

$$b \succ \beta a + (1-\beta) c$$

なるα，$\beta \in (0, 1)$が存在する。

定理8.4（Fergusonの期待効用定理）．a，$b \in S$に対して

$$a \succ b \Longleftrightarrow u(a) > u(b) \tag{8.14}$$

であるような関数uが存在するための必要充分条件は公理F1，F2，F3が成立することである。

さらに，式（8.14）を満たす関数uは正の線型変換まで一意的である（Ferguson, 1967）。

ただし

$$u\,(a)=E\,(u\,,\,a)=\sum_{x\in X}u\,(x)\,a\,(x)$$

と定義される。そして公理F 1，公理F 2，公理F 3から構成されるFerguson の公理系を**公理系F**と呼ぼう。

5－2　公理系Fに対する注釈

1）要素a，$b\in S$に対して$a\succsim b$であることの否定は$b\succ a$である。なぜならば，公理F 1の弱順序性により全てのa，$b\in S$に対して$a\succ b$，$a\sim b$，$b\succ a$のどれか一つが成立しなければならない(第2章4－2節「弱順序，全順序，半順序」，参照)。それゆえに$a\succ b$，または，$a\sim b$が否定されるとき，$b\succ a$が成立する。したがって，公理F 2の必要条件の部分の対偶，すなわち，

$$\alpha a+(1-\alpha)\ c\succsim\alpha b+(1-\alpha)\ c$$

であるならば$a\succsim b$であることの対偶は$b\succ a$ならば

$$\alpha b+(1-\alpha)\ c\succ\alpha a+(1-\alpha)\ c$$

であることである。

このように，公理F 2は，必要条件の部分では$a\succ b$ならば

$$\alpha a+(1-\alpha)\ c\succ\alpha b+(1-\alpha)\ c$$

であることを，充分条件の部分では$a\succsim b$ならば

$$\alpha a+(1-\alpha)\ c\succsim\alpha b+(1-\alpha)\ c$$

であることを要求している。

そして$a\sim b$が$a\succsim b$，かつ，$b\succsim a$を意味していることを考慮するとき，公理F 2は，もし$a\sim b$であるならば

$$\alpha a+(1-\alpha)\ c\succsim\alpha b+(1-\alpha)\ c \qquad (8\ .\ 15)$$

かつ

$$\alpha b+(1-\alpha)\ c\succsim\alpha a+(1-\alpha)\ c \qquad (8\ .\ 16)$$

なることを要請する。したがって，もし$a\sim b$であるならば，式（8 .15），

（８．16）により

$$\alpha a+(1-\alpha)c \sim \alpha b+(1-\alpha)c$$

が成立する。

そして $a \succsim b$ が成立し，$a \succ b$ が成立しないならば，$a \sim b$ が成立する。以上の議論から，公理Ｆ２は

(1)　もし $a \succ b$ ならば，そのとき

$$\alpha a+(1-\alpha)c \succ \alpha b+(1-\alpha)c \tag{8.17}$$

あるいは

(2)　もし $a \sim b$ ならば，そのとき

$$\alpha a+(1-\alpha)c \sim \alpha b+(1-\alpha)c \tag{8.18}$$

これら二つの内容を含んでいることが判明する。

式（８．17）も**独立性の公理**と呼ばれている（Fishburn, 1970, Jensen, 1967)。式（８．18）は明らかに代替性公理である。

2) 式（８．17）の部分に限定して公理Ｆ２の解説をしよう。

結合 $\alpha a+(1-\alpha)c$ は“くじ”$l_1=(\alpha\cdot a,(1-\alpha)\cdot c)$ と解釈される。同様に，結合 $\alpha b+(1-\alpha)c$ は“くじ”$l_2=(\alpha\cdot b,(1-\alpha)\cdot c)$ となる。事象 A が生じる確率 $P(A)$ を α とし，事象 B が生じる確率 $P(B)$ を $(1-\alpha)$ としよう。そのとき，公理Ｆ２はもし a が b より選好されるならば意思決定者が“くじ”l_2 より“くじ”l_1 を選好することを要請する。つぎの支払行列を考えることによってその意味が一層明瞭になるだろう。

表　8－1　支払行列

“くじ”	事象 A	事象 B
l_1	a	c
l_2	b	c

支払行列から理解されるように，事象Bが生じたときには，“くじ” l_1 と“くじ” l_2は同じ確率分布cをもたらす。事象Aが生じたときには，“くじ” l_1は確率分布aをもたらし，“くじ” l_2は確率分布bをもたらす。確率分布aが確率分布bより選好され，事象Aが生じる確率$P(A)=\alpha$が正であるとき，“くじ” l_1は，bより選好されるaが確率$P(A)$で得られる可能性が存在するゆえに，“くじ” l_2より意思決定者にとって望ましいと言える。言い換えると，“くじ” l_1は“くじ” l_2を**支配**（dominate）している。さらに公理F 2は，事象Aの確率$P(A)$が任意の値$\alpha \in (0, 1)$であり，確率分布$c \in S$が任意であるときにも，この支配の成立を要求している。

3）式（8．17）のタイプはSamuelson (1952, 1966)によって提唱され，独立性の公理と呼ばれた。しかしながら，Samuelsonは確率論の独立性の公理（the independence axiom of the probability theory)なる表現を使っているが，確率論で使われる独立性と公理F 2における独立性とは意味が異なる（Samuelson, 1952, p. 673）。したがって，この独立性の意味は少々注意を必要とする。

いま，事象Bが起ったという条件のもとで事象Aが起る条件付確率を$P(A/B)$と記すことにしよう。そのとき，$P(A)>0$ならば2つの事象A，Bが確率的に独立であるための必要充分条件は

$$P(A/B)=P(A) \qquad (8.19)$$

が成立することである（Feller, 1950, p. 114)。しかしながら，事象A，Bの排反性から，$P(A)=\alpha$，$P(A/B)=0$となり，式（8．19）は成立しない。したがって，事象A，Bは確率的に独立ではない。

公理F 2における独立性とはつぎのような内容である；事象Aと事象Bは相互に排反的（mutually exclusive）である。すなわち，事象Aが生じたならば，事象Bは生じないし，事象Bが生じたならば，事象Aは生じない。事象Aが生じたとき，選好問題は，支払行列（表8－1）から理解されるように，選択対

象 a と b の間における選好を決めることである。一方，事象 B が生じたとき，選好問題は選択対象 c と c の間における選好を決めることである。したがって，事象 A と事象 B の相互排反性によって事象 A における選好問題が事象 B における選好問題に影響を与えることはないし，逆に事象 B における選好問題は事象 A における選好問題に影響を与えることもない。このように，公理F２における独立性は事象 A における選好と事象 B における選好が独立であるという意味である。

6.　Luce-Raiffa の公理系

6－1　公理系ＬＲ

有限個の結果を含む集合 X を

$$X = \{ x_1 , x_2 , \cdots , x_r \}$$

とし，その X の上で定義された“くじ”の集合を S としよう。また，結果 x_i，x_{i+1} には $x_i \succsim x_{i+1}$ なる関係があるとしよう。

公理ＬＲ１（弱順序）：集合 X の要素に関する選好関係 $\succsim$ は弱順序である。すなわち，(1) 連結性と (2)推移性が成立する。

公理ＬＲ２（複合くじの簡略化）：もし $l_i = (p_1^{(i)} \cdot x_1 , p_2^{(i)} \cdot x_2 , \cdots , p_r^{(i)} \cdot x_r)$，$i = 1, 2, \cdots, s$ ならば，そのとき

$$(q_1 \cdot l_1 , q_2 \cdot l_2 , \cdots , q_s \cdot l_s)$$
$$= (p_1 \cdot x_1 , p_2 \cdot x_2 , \cdots , p_r \cdot x_r)$$

となる。ただし

$$p_i = q_1 p_i^{(1)} + q_2 p_i^{(2)} + \cdots + q_s p_i^{(s)}$$

である。

公理ＬＲ３（連続性）：全ての$x_i \in X$に対して

$$x_i \sim (\alpha_i \cdot x_1, 0 \cdot x_2, \cdots, 0 \cdot x_{r-1}, (1-\alpha_i) \cdot x_r) = \tilde{x}_i$$

であるような数$\alpha_i \in [0, 1]$が存在する。便宜上，

$$\tilde{x}_i = (\alpha_i \cdot x_1, (1-\alpha_i) \cdot x_r)$$

と表現しよう。

公理ＬＲ４（代替性）：全ての“くじ” $l \in S$において$\tilde{x}_i$はx_iと代替させられうる，すなわち，

$$(p_1 \cdot x_1, p_2 \cdot x_2, \cdots, p_r \cdot x_r) \sim (p_1 \cdot x_1, p_2 \cdot x_2, \cdots, p_i \cdot \tilde{x}_i, \cdots, p_r \cdot x_r)$$

が成立する。

公理ＬＲ５（推移性）：“くじ”に関する選好関係$\succsim$は推移的である。

公理ＬＲ６（単調性）：“くじ” $l_1 = (p \cdot x_1, (1-p) \cdot x_r)$，$l_2 = (p' \cdot x_1, (1-p') \cdot x_r)$に関して$l_1 \succ l_2$なるための必要充分条件は$p > p'$なることである。

定理８．５（Luce-Raiffaの期待効用定理）．l，$l' \in S$に対して

$$l \succsim l' \Longleftrightarrow u(l) \geq u(l') \qquad (8.20)$$

であるような関数uが存在するための必要充分条件は公理ＬＲ１，ＬＲ２，ＬＲ３，ＬＲ４，ＬＲ５，ＬＲ６が成立することである。

さらに，式（８．20）を満たす関数uは正の線型変換まで一意的である（Luce-Raiffa, 1957）。

ただし，$l = (p_1 \cdot x_1, p_2 \cdot x_2, \cdots, p_r \cdot x_r)$に対して

$$u(l) = E(u, l) = \sum_{i=1}^{r} p_i u(x_i)$$

と定義される。そして公理ＬＲ１，公理ＬＲ２，公理ＬＲ３，公理ＬＲ４，公理ＬＲ５，公理ＬＲ６から構成されるLuce-Raiffaの公理系を**公理系ＬＲ**と呼ぼう。

６－２　公理系ＬＲに対する注釈

1) ３章２節における公理系と同様に，Luce-Raiffaの公理系は結果の集合Xの上で定義された“くじ”に対する効用関数の存在を保証している。公理ＬＲ１は結果の集合の要素に関する弱順序を要求している。一方，第３章における公理１は“くじ”の集合Ωの要素に関する弱順序を要求している。結果の集合に関する選好と“くじ”の集合に関する選好を区別しようとしている点に公理系ＬＲの特色がある。

しかしながら，結果の集合Xは任意の対象から構成される集合であるゆえに，集合Xが“くじ”の集合であることも可能である（第７章２－２節「小世界と期待効用」，参照）。そのとき公理ＬＲ４と公理ＬＲ６は重複した内容を有するゆえに，どちらか一つは期待効用の公理系には不必要である（付録４，参照)。また，公理ＬＲ５は公理ＬＲ１に含まれることになる。その結果，期待効用の公理系は公理ＬＲ１，ＬＲ２，ＬＲ３，ＬＲ４から構成されることになる。したがって，ここでは，結果の集合Xは確実な結果から構成されていると解釈しよう。

2) 公理ＬＲ５は“くじ”に関する選好関係が推移的であることを示しているが，“くじ”に関する連結性は公理系ＬＲには明示的に示されていない。そこで，公理系ＬＲにおいて“くじ”に関する連結性がどのように引きだされるかをたどってみよう。

任意の“くじ”lにおける結果x_iに対して公理ＬＲ３，公理ＬＲ４　公理ＬＲ５，公理ＬＲ２を順次適用するならば，そのとき公理ＬＲ６のタイプの“くじ”が得られる。すなわち，任意の“くじ”$l=(p_1\cdot x_1,\ p_2\cdot x_2, \cdots, p_r\cdot x_r)$

における任意のx_iに対して，公理ＬＲ３によって

$$x_i \sim (\alpha_i \cdot x_1 \ , \ (1-\alpha_i) \cdot x_r) = \tilde{x}_i$$

なる$\alpha_i \in [0 \ , \ 1]$が存在する。公理ＬＲ４によって

$$l = (p_1 \cdot x_1 \ , \ p_2 \cdot x_2 \ , \cdots , \ p_i \cdot x_i \ , \cdots p_r \cdot x_r)$$

$$\sim (p_1 \cdot x_1 \ , \ p_2 \cdot x_2 \ , \cdots , \ p_i \cdot \tilde{x}_i \ , \cdots , \ p_r \cdot x_r)$$

が得られる。この過程を$x_j \neq x_i$（$j=1, \ 2, \ \cdots, \ r, \ j \neq i$）に適用するとき，公理ＬＲ５によって，最終的に

$$l \sim (p_1 \cdot \tilde{x}_1 \ , \ p_2 \cdot \tilde{x}_2 \ , \cdots , \ p_r \cdot \tilde{x}_r)$$

が得られる。そのとき，公理ＬＲ２によって，

$$l \sim (p_1 \cdot \tilde{x}_1 \ , \ p_2 \cdot \tilde{x}_2 \ , \cdots , \ p_r \cdot \tilde{x})$$

$$\sim (p \cdot x_1 \ , \ (1-p) \cdot x_r)$$

となる，ただし

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_r p_r$$

である。

このように，任意の“くじ” l に対して，それと無差別な（$p \cdot x_1$，$(1-p) \cdot x_r$）なるタイプの“くじ”が存在する。そして（$p \cdot x_1$，$(1-p) \cdot x_r$）タイプの“くじ”に対しては，公理ＬＲ６によって，pの大小関係を通じて連結性が保証されている。この連結性が公理ＬＲ５における“くじ”の推移性によって“くじ”に関する連結性に移行される。

3）確実な結果の集合Xに関する連結性は“くじ”の集合Sに関する連結性よりも意思決定者にとって処理しやすい仮定であろう。例えば，100万円と10万円の比較は“くじ” $l_1 = (\frac{1}{2} \cdot 100$万円$, \frac{1}{2} \cdot 10$万円$)$，$l_2 = (\frac{1}{3} \cdot 100$万円$, \frac{2}{3} \cdot 30$万円$)$ に関する比較より容易である。

4）公理ＬＲ２は公理ＶＭ４の後半部分あるいは混合集合の条件Ｍ３に対応している。留意されるべきことは確率ベクトル$p^{(i)} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \cdots, p_r^{(i)})$，$(i=1, 2, \cdots, s)$と確率ベクトル$q = (q_1, q_2, \cdots, q_s)$が**互いに独立**であるこ

とである。

5) 最も選好される結果x_1と最も選好されない結果x_r, これら二つの結果だけを含む“くじ” $l_1=(p\cdot x_1, (1-p)\cdot x_r)$, $l_2=(p'\cdot x_1, (1-p')\cdot x_r)$が存在するとき，意思決定者は結果$x_1$が生じる確率の大きい“くじ”を選好すること，これが公理ＬＲ６の内容である。したがって最も選好される結果x_1の確率pが大きくなればなるほど，“くじ” $l=(p\cdot x_1, (1-p)\cdot x_r)$はますます選好されるようになる。さらに，確率$p$が大きくなるとき，最も選好されない結果$x_r$の確率$(1-p)$は小さくなる。

6) 関数$f(x)$において$x_1>x_2$ならば$f(x_1)>f(x_2)$であるとき，関数$f(x)$は単調増加あるいは単調であると言われる。同様に，“くじ” $l=(p\cdot x_1, (1-p)\cdot x_r)$において$p_1>p_2$ならば，

$$(p_1\cdot x_1, (1-p_1)\cdot x_r)\succ(p_2\cdot x_1, (1-p_2)\cdot x_r)$$

であるゆえに，“くじ” lはpに関して単調であると言えるだろう。公理ＬＲ６における単調性はこのような意味で使われている。

7. Blackwell-Girshick の公理系

7－1　公理系ＢＧ

集合Sは離散的確率分布（discrete probability distribution）の集合としよう。すなわち，集合Sの要素は可付番無限個の（denumerable）結果から構成される集合の上で定義されている。そして，確率分布$\alpha a+(1-\alpha)b\in S$において部分集合$A\subset X$が生じる確率を$\alpha a(A)+(1-\alpha)b(A)$と表現しよう。

公理ＢＧ１（弱順序）：集合Sの要素に関する選好関係$\succsim$は弱順序である。すなわち，(1) 連結性と (2) 推移性が成立する。

公理ＢＧ２（独立性）：全ての$a_n, b_n\in S$に対して$a_n\succsim b_n$が全てのnにつ

いて成立しているならば，そのとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n \succsim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n,\ \alpha_n \geq 0\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$$

が成立する。さらに，もしある自然数 n に対して $\alpha_n > 0$ で，$a_n \succ b_n$ であるならば，そのとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n \succ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n$$

が成立する。

公理ＢＧ３（連続性）：もし a，b，$c \in S$ に対して $a \succ b \succ c$ であるならば，そのとき

$$b \succ \alpha a + (1-\alpha) c$$

$$\beta a + (1-\beta) c \succ b$$

なる，α，$\beta \in (0\ ,\ 1)$ が存在する。

定理８．６（Blackwell-Girshickの期待効用定理）．a，$b \in S$ に対して

$$a \succ b \Longleftrightarrow u(a) > u(b) \tag{8.21}$$

を満足する“有界”な関数 u が存在するための必要充分条件は公理ＢＧ１，ＢＧ２，ＢＧ３が成立することである。

さらに，式（８．21）を満たす関数 u は正の線型変換まで一意的である（Blackwell-Girshick, 1954）。

ただし

$$u(a) = E(u\ ,\ a) = \sum_{i=1}^{\infty} u(x_i)\, a(x_i),\ x_i \in X$$

と定義される。そして公理ＢＧ１，公理ＢＧ２，公理ＢＧ３から構成されるBlackwell-Girshick の公理系を**公理系ＢＧ**と呼ぼう。

7－2　公理系ＢＧに対する注釈

1) 公理ＢＧ２はFergusonの公理Ｆ２を可付番無限の場合に拡張されたものと考えられる。そしてこの公理によってBlackwell-Girshickは**効用関数の有界性**を導いている。いま，彼らの議論に従ってこの有界性を示そう（Blackwell-Girshick, 1954, p.109)。効用関数uは（上から）有界でないとしよう。そのとき，$a_n \in S$，($n=1, 2, \cdots$) に対して$u(a_n) > 2^n$，かつ$u(a_n) > u(a_{n-1})$である列$\{a_n\}$を作ることが出来る。そして

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n$$

$$b_N = \left(\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} a_n\right) + 2^{-N} a_N$$

としよう。そのとき，　$2^{-N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}$　から，

$$b = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} a_n$$

$$b_N = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} a_N$$

であるゆえに，公理ＢＧ２によって全てのNに対して

$$b \succ b_N$$

となる。したがって全てのNに対して

$$u(b) > u(b_N)$$

となる。一方，仮定$u(a_n) > 2^n$によって

$$u(b_N) = u\left(\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} a_n + 2^{-N} a_N\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} u(a_n) + 2^{-N} u(a_N) > N+1$$

が得られる。そのとき，全てのNに対して

$$u(b) > u(b_N) > N+1$$

となるが，$u(b)$はある実数値であるゆえにこれは不可能である。このように，公理系ＢＧでは効用関数uは有界となる。

2) もし効用関数uが有界ならば，そのとき

$$u\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u(a_n)$$

が成立する。

なぜならば，いま，ある数n_0より大きい自然数nに対して$\alpha_n>0$（したがって全てのNに対して$\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n\neq 0$）としよう。そのとき

$$u\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n a_n\right)=u\left[\sum_{n=1}^{N}\alpha_n a_n+\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n\right)\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\alpha_n/\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n\right)a_n\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n u(a_n)+\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n u\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\alpha_n/\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n\right)a_n\right)$$

が成立する。関数uは有界であるゆえに，$N\to\infty$のとき

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n u\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\alpha_n/\sum_{n=N+1}^{\infty}\alpha_n\right)a_n\right)\to 0$$

となる。したがって

$$u\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u(a_n)$$

が得られる。

3）結果の集合Xは金額の集合とし，x_1，$x_2\in X$に対して$x_1>x_2$であるならば$x_1\succ x_2$であるとしよう。もし効用関数が$u(x)=x$であるならば，期待値が存在するような確率分布の集合Sに関してFergusonの公理系は成立している。いま，これを検証しよう。

効用関数$u(x)=x$は全てのa，$b\in S$に対して

$$a\succsim b\Longleftrightarrow E(u,a)\geq E(u,b) \qquad (8.22)$$

なる関係を満たす。明らかなように，$E(u,a)$は，$u(x)=x$であるとき，確率分布aの期待値である，すなわち，

$$E(u,a)=E(x,a)=\sum x a(x)$$

式（8.22）は弱順序の成立を意味している。したがって公理F 1が成立する。そして

$$E(u,\alpha a+(1-\alpha)c)=\sum x\{\alpha a(x)+(1-\alpha)c(x)\}$$
$$=\sum x\alpha a(x)+\sum x(1-\alpha)c(x)$$
$$=\alpha E(u,a)+(1-\alpha)E(u,c)$$

であるゆえに，

$$\alpha a+(1-\alpha)c\succsim\alpha b+(1-\alpha)c$$

であるための必要充分条件は

$$E\ (u\ ,\ \alpha a+\ (1-\alpha)\ c)\geq E\ (u\ ,\ \alpha b+(1-\alpha)\ c)$$

すなわち

$$E\ (u\ ,\ a)\geq E\ (u\ ,\ b)$$

すなわち

$$a\succsim b$$

である。したがって公理Ｆ２が成立する。また，もし $a\succ b\succ c$，すなわち，$E\ (u\ ,\ a)>E\ (u\ ,\ b)>E\ (u\ ,\ c)$ であるならば，そのとき

$$\alpha a+\ (1-\alpha)\ c\succ b \qquad (8\ .23)$$

であるための必要充分条件は

$$\alpha E\ (u\ ,\ a)\ +\ (1-\alpha)\ E\ (u\ ,\ c)\ >E\ (u\ ,\ b) \qquad (8\ .24)$$

となる。それゆえに式（8 .24）を満たす $\alpha\in$（０，１）が存在し，その α は式（8 .23）も満たす。同様に，

$$b\succ\beta a+\ (1-\beta)\ c$$

を満たす $\beta\in$（０，１）も存在する。したがって公理Ｆ３が成立する。

しかしながら $u\ (x)\ =x$ は有界な効用関数ではない。このように，Ferguson の期待効用定理では効用関数の有界性は要求されていない。

4）もし公理ＢＧ２が成立するならば，そのとき $a\succsim b$，$c\sim c$ なる a，b，$c\in S$ に対して

$$\alpha a+\ (1-\alpha)\ c\succsim\alpha b+\ (1-\alpha)\ c \qquad (8\ .25)$$

が成立する。それゆえに，公理ＢＧ２は公理Ｆ２よりも強い仮定と言える。

しかしながら，付録５の定理５から理解されるように，もし S が離散的確率分布の集合であるならば，Ferguson の公理系は効用関数の有界性を要求している。したがって離散的確率分布の集合における期待効用定理であったとしても，公理ＢＧ２を有限個の結合である式（8 .25）タイプの独立性公理によっておき換えることが可能である。その意味では公理ＢＧ２は冗長な公理である。

第9章　公理系の評価

1. はじめに

本章の2節では、期待効用の公理系または公理の一般的性格ならびにそれらに望まれる一般的性質について、主としてVon Neumann-Morgenstern (1947) の所論から、考察がなされる。未定義の概念及びルール、公理系における公理の数、単純性、理解容易性、直観的明瞭性、直載的感覚などが議論の対象である。

第8章でとりあげられた諸公理系が基本的には同値であることは付録4で示されている。その諸公理系に含まれる各公理はつぎの4つの類のどれかにぞくする、

(1) 弱順序(の公理)の類：弱順序の公理、ただし公理系VMでは全順序の公理、

(2) 独立性(の公理)の類：独立性の公理、絶対確実の原則、代替性の公理、単調性の公理、

(3) 連続性(の公理)の類：アルキメディアン公理、連続性の公理、

(4) 構造(の公理)の類：混合集合、公理VM4、公理M4、公理LR2。

その中で、(4) 構造の類にぞくする諸公理は各公理系において必ずしも掲げられていないが、暗黙的には仮定されている。そして、付録4の議論から理解されるように、意思決定者の選好行動を強く規制していると考えられる諸公理は (1) 弱順序の類、(2) 独立性の類、(3) 連続性の類のどれかに含まれている。さらに、各公理系はこれら (1)、(2)、(3) の各類に含まれている公理の少なくとも一つを必要としている。例えば、公理系Mは(1)の類にぞくする弱順序の公理、(2)の類にぞくする代替性の公理、(3)の類にぞくする連続性の公理から構成されている。

3節では、これら4つの類ごとに、主に批判的視点から公理系または公理の

問題点が検討される。3－1節では、無差別と決定不能の問題、リスク的初期条件のもとにおける無差別と初期条件なしの無差別の問題が議論される。3－2節では、確率と確実な結果の相互作用、小さな確率を無視することなどの影響が検討される。3－3節では、意思決定者の認識能力、リスク的初期条件のもとでの連続性などが吟味される。3－4節では、リスク的初期条件と選択対象の確率的独立性、確実性効果などが考察される。

2. 公理系の構成に関する考察

公理系をどのように構成するかということは、以下に述べるように、完全に論理的に決定される事項ではない。公理系には、ある明確な目的を達成するための議論に対して基礎または枠組たることが要求されている。ある制約された環境で意思決定者は“**満足**”を増大するような行動を選好するという前提で、意思決定者の行動を分析すること、これが目的である。そのとき、意思決定者の行動を科学的に、精密に分析するためには、“満足”あるいは“効用”を量的記述でなされた明瞭な表現に変換することは必要な過程の一つであろう。すなわち、意思決定者の行動を科学的に、精密に分析するためには“効用”の尺度（measurement）が要求される。

一般的な意味での尺度なるものは、究極的には、それ以上分析されえないし、分析される必要性を認めないような**直截的な感覚**に基づかなければならないようにみえる。“長さ”という感覚はそのようなものの一例である。“満足”あるいは“効用”の尺度の場合では、選好という直截的な感覚が基礎となりうる。そのとき、選好に関連する**非定量的な経験の関係**あるいは経験の性質から“効用”の尺度は導きだされなければならない（Von Neumann-Morgenstern, 1947, p. 16)。

公理として定式化される選好の関係あるいは性質は、表現の形式において異なると言えども、本質的には、意思決定者が従うべき常識的な指針（guideline)

を含むだろう。すなわち、ある意味で不変な内容を含むだろう（Fishburn, 1968, p. 237)。もし意思決定者の行動に関する公理が、全て、恣意的に構成されているならば、そのときそのような公理系から導出された結果には一般的な意思決定者の集合に適用されない例外的な命題があるにすぎない。このような意味においても公理系の構成が全く恣意的になされうるものではない。

効用の尺度を確立すること、それは選好に関する経験的な関係（Von Neumann-Morgenstern (1947) は自然の関係（natural relation)と呼ぶ）を定量的な関係に翻訳することである。そのさい、我々はまず効用の尺度が適用される状況を記述しなければならない。少し具体的に言えば、例えば、選択の対象としてどのようなものを想定しているかである。これに関連する公理は選好行動から制約されたものでなく、考察の対象となっている選択対象の構造そのものを規定するか、あるいは、形式上の違いではあるが、ある構造上での関係を規定する。この構造上の仮定は意図された尺度が所与であるかぎり表現においてそれほど大きな相違をもたないだろう。

このように、効用の尺度を展開するという目的、それを達成できる程度まで過不足なく、かつ、客観的に、公理系は構成されなければならない。この最低必要限度、すなわち、上記の公理系の客観性を越える考察には、やや不明瞭な表現ではあるが、**望ましさ**（desiderata）という基準に従うことが必要となろう。それらの具体的な項目として Von Neumann-Morgenstern（1947, p. 251）あるいは Krantz-Luce-Suppes-Tversky（1971, p.22）はつぎの3つを挙げている；（その1）公理系における**公理の数**は、過度に、多くあるべきでない、（その2）公理系はできるかぎり**単純**、かつ、**理解容易**であるべきである、（その3）公理はそれの適切さが直ちに判断できるように**直截的に明瞭な意味**をもつべきである。公理系における公理の数は、ある程度、調整可能なものである。すなわち、公理の数を削減するという意図のもとに、技術的に可能なかぎりいくつかの公理を結合することはできるだろう。しかしながら、

そのときには、種々の概念の相違が不明瞭になり、**単純性、理解容易性、直截的明瞭性**などが犠牲となるかもしれない。そして、一見単純に見える公理の中にかなり複雑な内容が含まれている可能性はある（Krantz-Luce-Suppes-Tversky, 1971, p.22)。

したがって、公理の数をできるだけ少なくするということは必ずしも歓迎されるべきことでもない。一方、公理の数が、不当に、多くなることは公理系全体の意味することを理解困難にならしめ、前述の望ましさを減少させることになるだろう。このように、公理の数という公理系の構成規準は諸々の要因を調和させるような判断によって支配されているようにみえる。

一般的に言って、“直截的に明瞭な意味”この語句が指しているところのものは厳密に定義されるものではないけれども、選好に関連するような場においてはこの規準は特に重要であると考えられる。公理は後に展開される議論の基礎、あるいは、出発点である。もし直截的に明瞭でないような概念、ルール、言語が公理系に含まれるならば、そのとき公理系からの議論において意思の疎通に障害が生じるだろう。そして建設的な議論を進めることができる可能性は全くないと言われるべきである（Finkbeiner, 1960, p.3)。それゆえに、不明瞭な概念やルールはなんらかの解説を必要としよう。もしその解説が充分でないならば、そのときさらに解説が要求される。

そのとき、その解説の過程が論理的であるならば、最終の解説は公理となりうるかもしれない。このように未定義の言語が公理系の確立には要求される。この要件が認められないとすれば、我々の限られた範囲内での語彙では同意語反復（tautology）が生じるにすぎない。それゆえに、解説の過程は終りのない循環的性質を有することになるだろう。議論の基礎として使われる基本的な知識に関してFinkbeiner（1960, p.4）はつぎの2つの仮定を挙げる；

(1) 他の用語を定義するために使われる基本的な言語に共通の理解がある。

(2) 仮説から結論へと進めるための論理的推論の体系に共通の理解がある。

このように、それ以上の分析を要求されない基本的知識としての未定義の概念ならびにルールは公理系内では直截的な明瞭性という性質を有さなければならない。

“あいまいさ”を含むヒュリスティック（heuristic）な望ましさや美的な望ましさなどの視点は公理系の構成に関して一意的な方法がないことを示している。上記のような状況のもとで、Von Neumann-Morgenstern（1947）が狙いとしたところは論理的または数学的処理に耐えうるような直截的概念を構成し、それがどのような仮説を指しているかをできる限り明確にしようとすることであった。

3. 公理に対する批判的注釈

3－1　弱順序の公理の類

弱順序の公理における連結性のもとでは、意思決定者は、任意の2つの“くじ”に対して、どちらか一方を選好するか、あるいは、無差別でなければならない。しかしながら、現実に、2つの“くじ”が示され、どちらか一方の“くじ”がとりあげられたとき、それは選好ではなく、無差別であるがただとりあげられたことを示しているかもしれない。すなわち、無差別である“くじ”をただとりあげたことと、選好したこととの区別が明確でないかもしれない。また意思決定者は比較能力を越えた選択対象に対しては選好を示すことができないゆえに、それらは無差別であるとされるかもしれない。例えば、“くじ”が非常に複雑であるために、どちらが意思決定者にとって望ましいかについての判断が可能でない場合はそれに当るであろう。

一方、推移性が**首尾一貫した選好行動**をとろうとする意思決定者によって守られなければならないルールであることは明らかである。そして、また“くじ”が複雑であるならば、そのとき推移性を犯すよう判断が生じる可能性は存在する。

しかしながら、期待効用の提唱者の一部では、意思決定者は選択対象の全ての対（pairs）に対して首尾一貫した選好関係を表現できることではなく、比較的単純な選択対象に対してそれがなされうること、それが要請されている（Luce-Raiffa, 1957, p.24, Pratt-Raiffa-Schlaifer, 1964）。

事実、期待効用が意図したところは選好関係が容易に示されないような選択対象間に選好順位をつけることであった。すなわち、複雑な選択対象（“くじ”として複雑であるという意味で）に選好順位をつけるためには、その対象を構成する単純な対象（すなわち、確実な結果）に関する選好関係が要求され、そののちに、それらの選好関係が期待効用によって統合された結果として、複雑な選択対象に対する選好順位が生じる。

第8章で挙げた諸公理系の中で、Luce-Raiffaの公理系だけがこの議論に適合すると考えられる。なぜならば、Luce-Raiffaの公理ＬＲ１は確実な結果だけに弱順序性を要求しているからである。また、Luce-Raiffaの公理系を除く他の公理系のように、意思決定者が全ての選択対象に弱順序を与えることができることは選択対象全てに選好順位がついていることでもある。そのとき最も望ましい選択対象を選好するという機能に関して期待効用は、もはや、必要でなくなる（Fishburn, 1968, p. 339）。

規範的（normative）視点からは、意思決定者が弱順序に関して不明確な判断をなすことは許容されている。その結果が公理を犯しているならば、一貫した選好を意図している意思決定者はその矛盾を矯正することを望むであろう。そのとき、この公理はその矯正に必要とされる。すなわち、この公理は意思決定者が従うべき首尾一貫性の表現とみなされている（Fishburn, 1972, p. 33）。

しかしながら、現実問題として確実な結果が極度に多いとき、効用の推定は困難になるかもしれない。さらに、実際に直面することが想像もできないような“くじ”に対して、意思決定者が適切な選好関係を表現できるかどうかは大きな疑問である（Jensen, 1967, a, p. 239）。

意思決定者は初期条件として“くじ”l_0を有しようとする。そのとき意思決定者が2つの“くじ”l_i、$l_j \in \Omega$に対して$l_i \succsim l_j$であると表明することは、$l_0 * l_i \succsim l_0 * l_j$であると判断していることを示す（“たたみこみ”$*$に関しては第4章2－1節「多重くじの可変半群性」を参照せよ)。一方、$l_0 * l_i \succsim l_0 * l_j$であるならば、“くじ”$l_i$、$l_j$だけの選好関係から言及するとき、意思決定者が$l_i \succsim l_j$であると表現することは可能である。

結論として

$$l_j \succsim l_j \Longleftrightarrow l_0 * l_i \succsim l_0 * l_j$$

となる。それゆえに、“くじ”l_i、l_jに関する連結性はこれらの“くじ”に初期条件をたたみこんだ状況での多重くじに関する連結性と同値になる。

推移性に関しても、また、同様のことが成立する。

しかしながら、意思決定者が$l_i \succsim l_j$であると表明することは常に初期条件l_0のもとでそうであると考えるべきである。初期条件を無視しても$l_i \succsim l_j$になると言えない例を示そう。

いま、3つの投資を“くじ”として表現しよう。“くじ”l_0は、つぎの選挙において自民党が勝つならば10億円の利益があり、野党が勝つならば2億円の利益があることを示している。“くじ”l_1は、自民党が勝てば20億円の利益があり、野党が勝てば3億円の利益があることを示している。“くじ”l_2は、自民党が勝てば3億円の利益があり、野党が勝てば20億円の利益があることを示している。そして自民党と野党が勝つ確率は、それぞれ、$\frac{1}{2}$としよう。これらの状況を表9－1で要約しておこう。

表　9－1

選挙の勝者	選挙に勝つ確率	“くじ” l_0	l_1	l_2
自民党	½	10	20	3
野党	½	2	3	20

“くじ” $l_1=(\frac{1}{2}\cdot 20, \frac{1}{2}\cdot 3)$ と “くじ” $l_2=(\frac{1}{2}\cdot 3, \frac{1}{2}\cdot 20)$ は “くじ” として全く同じものであるゆえに、初期条件 l_0 が無視されるとき明らかに $l_1 \sim l_2$ である。一方、初期条件をたたみこんだ状況 $l_0 * l_1$、$l_0 * l_2$ は、“くじ” 間における確率的独立性がないために、式（4．2）における定義とは事情が少々異なり、

$$l_0 * l_1 = (½\cdot(10+20),\ ½\cdot(2+3))$$
$$= (½\cdot 30,\ ½\cdot 5)$$
$$l_0 * l_2 = (½\cdot(10+3),\ ½\cdot(2+20))$$
$$= (½\cdot 13,\ ½\cdot 22)$$

なる “くじ” となる。このようなとき、“くじ” $l_0 * l_1$ と “くじ” $l_0 * l_2$ が無差別であると必ずしも言えないだろう（Bell, 1982）。

3－2 独立性の公理の類

付録4「諸公理系の同値性」における議論から理解されるようにつぎの諸公理は同じ機能を果していると見なされる；全てのａ、ｂ、ｃ、ｄ∈Ｓと全ての α、$\beta \in (0, 1)$ に対して

1) （Von Neumann-Morgenstern）もしａ≻ｂであるならば、そのとき

$$a \succ \alpha\cdot a \dot{+} (1-\alpha)\cdot b \succ b$$

である。

2) （Marschak）もしａ～ｂであるならば、そのとき

$$\alpha\cdot a \dot{+} (1-\alpha)\cdot c \sim \alpha\cdot b \dot{+} (1-\alpha)\cdot c$$

である。

3) （Herstein-Milnor）もしａ～ｂであるならば、そのとき

$$\frac{1}{2}\cdot a \dot{+} \frac{1}{2}\cdot c \sim \frac{1}{2}\cdot b \dot{+} \frac{1}{2}\cdot c$$

である。

4) （Ferguson） ａ $\succsim$ ｂなるための必要充分条件は

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succsim \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \qquad (9.\ 1)$$

である。

5)　(Luce-Raiffa)　もし $a \succ b$ であるならば、そのとき

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ \beta \cdot a \dot{+} (1-\beta) \cdot b$$

なるための必要充分条件は $\alpha > \beta$ である。

6)　(Blackwell-Girshick)　もし $a \succsim b$、かつ、$c \succsim d$ であるならば、そのとき

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succsim \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot d$$

である。

第8章「期待効用の諸公理系」での各公理に対する注釈から理解されるように、これらの公理に従って意思決定者が行動すべきであるという主張は不合理ではないようにみえる。しかしながら、つぎのような例を考えよう。

“くじ” l_{100} は100万円を確率1で、“くじ” l_{250} は250万円を確率1で、“くじ” l_{-500} は－500万円を確率1で与えるものとしよう。そして“くじ” l_1 は

$$\begin{aligned} l_1 &= (0.96 \cdot 250\text{万円},\ 0.04 \cdot -500\text{万円}) \\ &= 0.96 \cdot l_{250} \dot{+} 0.04 \cdot l_{-500} \end{aligned}$$

であり、“くじ” l_2 は

$$\begin{aligned} l_2 &= (0.5 \cdot -500\text{万円},\ 0.5 \cdot 100\text{万円}) \\ &= 0.5 \cdot l_{-500} \dot{+} 0.5 \cdot l_{100} \qquad (9.\ 2) \end{aligned}$$

としよう。

さて、ある意思決定者にとって“くじ” l_1 と l_{100} が無差別であるとしよう。そのとき代替性公理（Marschak）によれば

$$\begin{aligned} l_2 &= 0.5 \cdot l_{-500} \dot{+} 0.5 \cdot l_{100} \\ &\sim 0.5 \cdot l_{-500} \dot{+} 0.5 \cdot (0.96 \cdot l_{250} \dot{+} 0.04 \cdot l_{-500}) \\ &= 0.52 \cdot l_{-500} \dot{+} 0.48 \cdot l_{250} \end{aligned}$$

$= l_3$ (9．3)

となる。

“くじ”l_2と“くじ”l_3を比較すると、l_2において100万円が得られる確率0.5を0.02だけ犠牲にすることによって、100万円の2.5倍の金額が生じる“くじ“l_3を手に入れることができるということが判明する。この確率と金額の交換は有利であると意思決定者が考え、“くじ”l_3が“くじ”l_2より選好されるかもしれない。このような場合には代替性の公理は成立しない。非常に小さな確率、あるいは、非常に小さな確率的差異を無視する、すなわち、例における確率0.5と確率0.48を無差別とみなすことが現実的である場合があると考える人々はいる（伊藤, 1980, p. 49)。意思決定者がそのような傾向を有しているならば、また“くじ”l_3が“くじ”l_2より選好されるだろう。

一方、Herstein-Milnorの代替性公理、すなわち、a～bであるならば、

$$\frac{1}{2}\cdot a \dot{+} \frac{1}{2}\cdot c \sim \frac{1}{2}\cdot b \dot{+} \frac{1}{2}\cdot c$$

では、確率$\frac{1}{2}$で成立することが要求されているだけである。それゆえに、この公理が使われるかぎり、意思決定者は**微小な確率的差異**を無視するという非難は問題にならないと議論されるかもしれない（Amihud, 1979, p. 150)。しかしながら、Herstein-Milnorの公理系はMarschakの代替性公理を意味する。そして効用関数の存在はMarschakの代替性公理を通じて証明されている。

そして公理系が混合集合の上で定義されていることに注意されたい。上記の例においても“くじ”l_2から“くじ”l_3を導出するにさいして、代替性の公理と混合集合の条件M３が使われている。それゆえに、代替性公理、そのものが直接に攻撃されているのではなく、混合集合の条件M３の適用後に、代替性の公理に対する不適切性が言及されている。後に述べる確実性効果（certainty effect)、Allais のパラドックスにおいても全く同じことが言われうる。

初期条件l_0が組みこまれた状況での代替性公理は、もし$l_1 \sim l_2$であるならば、そのとき全ての$l \in \Omega$と全ての$\alpha \in (0,1)$に対して

$$\alpha \cdot l_0 * l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_0 * l$$
$$\sim \alpha \cdot l_0 * l_2 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_0 * l$$

であることである。いま、$l_1 \sim l_2$ が $l_0 * l_1 \sim l_0 * l_2$ であることを意味するならば、そのときこれらの“くじ”において確率 α を与える事象と確率（$1-\alpha$）を与える事象は排反的であるゆえに、この公理だけをみるかぎり、この公理に対する疑問の余地はない。

３－３　連続性の公理の類

つぎの諸公理は、また付録４における議論から理解されるように、それぞれの公理系において同じ機能を果しているとみなされうる；全てのａ、ｂ、ｃ∈Ｓに対して

1)　（Von Neumann-Morgenstern）もし $a \succ b \succ c$ であるならば、そのとき

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succ b$$

かつ

$$b \succ \beta \cdot a \dot{+} (1-\beta) \cdot c$$

となるような α、$\beta \in (0,\ 1)$ が存在する。

2)　（Marschak）もし $a \succ b \succ c$ であるならば、そのとき

$$b \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

なる $\alpha \in (0,\ 1)$ が一意的に存在する。

3)　（Herstein-Milnor）集合Ａと集合Ｂ、すなわち

$$A = \{\, \alpha \mid \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c \,\}$$

と

$$B = \{\, \alpha \mid c \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \,\}$$

は閉集合である。

これらの公理の含意には、前に述べたように、“くじ”あるいは“くじ”の

結果に絶対的な価値を付与することを禁じていることがある。例えば、“くじ” l_1 は生命の危険なしに結果、百円、を意思決定者に与え、“くじ” l_2 は生命の危険なしにゼロ円を与え、“くじ” l_3 は、生命が危険になる可能性は極度に小さいが、結果、百円、を与えるとしよう。

そのとき、もちろん、“くじ” l_1 は “くじ” l_2 より選好される。しかしながら、連続性の公理では、“くじ” l_3 における死の可能性が充分に小さいならば、“くじ” l_3 は “くじ” l_2 より選好されるべきであるとされている。すなわち、百円を受けとることと比較にならないような結果、死、といえども、その可能性が充分に小さいとき、百円なる金額との比較が意味をもつとされている。このような現象は日常しばしばみられるところである。それゆえに、連続性の公理は現実生活における問題を定式化するにさいして不可避で無害な単純化であるといわれている（Arrow, 1970, p. 48)。

しかしながら、つぎのような例がFishburn（1979, p.247）によって示されている。“くじ” l_{35} は35万円を確率1で与え、“くじ” l_{36} は36万円を確率1で与え、“くじ” l は100万円を確率$\frac{1}{2}$で、ゼロ円を確率$\frac{1}{2}$で与えるとしよう。そのとき、$l_{36} \succ l_{35}$ であろう。一方、“くじ” l に含まれる確率$\frac{1}{2}$に対する判断、ならびに、“くじ” l と36万円または35万円に対する選好の識別困難によって、$l \sim l_{35}$、かつ、$l \sim l_{36}$ なることがもたらされたとしても驚くべきことでないだろう。

そのとき、連続性の公理における α の一意性は成立しない。さらに、“くじ” l_{36} や “くじ” l_{35} よりもより一層複雑な “くじ” の場合、意思決定者が α を一意的に決めることはますます困難になるだろう。上の例は互いによく似ている “くじ” を識別することの困難性を指摘している。

さて、意思決定者の選好が $l_1 \succ l_2 \succ l_3$ であるとき、連続性の公理により

$$l_2 \sim \alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_3 \qquad (9.\ 4)$$

なる $\alpha \in (0,\ 1)$ が一意的に存在する。一方、初期条件 l_0 を組みこんだ状

況を考えよう。そのとき、$l_0 * l_1 \succ l_0 * l_2 \succ l_0 * l_3$ なる $l_0 * l_1$、$l_0 * l_2$、$l_0 * l_3$ に対しても公理は論理的には全く同じ構造であるゆえに、

$$l_0 * l_2 \sim \alpha_0 \cdot l_0 * l_1 \dot{+} (1-\alpha_0) \cdot l_0 * l_3$$

なる $\alpha_0 \in (0, 1)$ が存在する。このようにして定められた α と α_0 は等しい数値になるであろうか。

演算＊の定義から

$$\alpha_0 \cdot l_0 * l_1 \dot{+} (1-\alpha_0) \cdot l_0 * l_3$$
$$= l_0 * (\alpha_0 \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha_0) \cdot l_3)$$

の成立が容易に検証されうる。したがって、

$$l_0 * l_2 \sim l_0 * (\alpha_0 \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha_0) \cdot l_3)$$

となる。もし α と α_0 が同じ数値であるならば、数値 α は初期条件とは独立であることになる。この α は“くじ” l_1 と“くじ” l_3 を基準としたときの“くじ” l_2 に対する意思決定者のある評価値、すなわち、効用である。それゆえに、この数値 α に基づく選好順序は初期条件 l_0 とは独立になる。

しかしながら、意思決定者が逓減的リスク回避的であるならば、α が α_0 と等しくなる保証はない（第4章「期待効用理論の妥当性」における式(4.17)ならびに式（4．19）を参照せよ)。例えば、“くじ” l_0 は確実な金額 ω としよう。そのとき

$$l_2 \sim \alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_3$$

と

$$\omega * l_2 \sim \omega * (\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_3)$$

が同値であるためには、一貫性の公理の成立が必要とされた（第5章2－1節「初期条件の経緯」を参照せよ)。一貫性の公理が成立するとき効用関数は Pfanzagl族、すなわち、指数型か線型でなければならない。この場合、意思決定者は一定リスク回避的となる。したがって、連続性の公理すなわち式（9．4）が無条件に成立するという主張は疑わしい。

3－4　構造の公理の類

第8章「期待効用の諸公理系」で挙げられた諸公理系において構造の公理と言われうるものには、Von Neumann-Morgensternの公理VM4、 Marschakの公理M４、Luce-Raiffaの公理ＬＲ２がある。公理M４は選択対象の集合Ｓが、少なくとも、２つの無差別でない要素を含むことを要求している。公理M４が成立しない場合、すなわち、集合Ｓの要素が全て無差別である場合には、任意の関数が効用関数になりうる資格を有する。したがって、この公理には特に注釈を加えるべき事項はない。

一方、公理VM4における式（8．1）は混合集合の条件M２に、式（8．2）は条件M３に相等する。そして公理ＬＲ２は条件M３に相等する。さらに、確率分布の集合は混合集合であった（第２章３－３節「混合集合」を参照せよ)。選択対象の集合が確率分布の集合であるとき、公理系には登場しないが暗黙的に混合集合が仮定されている。第８章における諸公理系の中で、Von Neumann-Morgensternの公理系とLuce-Raiffaの公理系を除く、全てがそうである。それゆえに、ここでは、混合集合の条件を考察することにしよう。

混合集合の条件M１、M２、M４に関しては意思決定者の選好を混乱させる問題はないようにみえる。しかし条件M２、すなわち、l_1、$l_2\in\Omega$と$\alpha\in$（０，１）に対して

$$\alpha\cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha)\cdot l_2=(1-\alpha)\cdot l_2 \dot{+} \alpha\cdot l_1$$

が初期条件$l_0\in\Omega$が考慮されるとき、成立しないかもしれない。

例えば、“くじ”$L_1=(½\cdot l_1,\ ½\cdot l_2)$と“くじ”$L_2=(½\cdot l_2,\ ½\cdot l_1)$は“くじ”として同じである。しかしながら、これらの“くじ”に含まれる確率$\frac{1}{2}$の事象が初期条件l_0に含まれる確率の事象と独立でないとき、“くじ”L_1と“くじ”L_2が必ずしも同じでないことは３－１節に掲げた表９－１で示されるような例から容易に理解されるだろう。

条件M３は普通の確率演算に相等する。しかしながら、リスク的状況での意

思決定者の行動が条件M３に従っていると仮定することには大きな疑問がある。例えば、Kahneman-Tversky（1979）によってつぎのような例が示されている。いま、つぎのような四つの“くじ”を考えよう。

$$l_1 = (0.8 \cdot 4000,\ 0.2 \cdot 0),$$

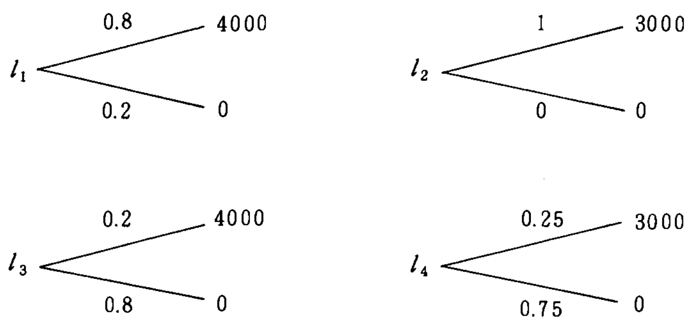
$$l_2 = (1 \cdot 3000,\ 0 \cdot 0),$$

$$l_3 = (0.2 \cdot 4000,\ 0.8 \cdot 0),$$

$$l_4 = (0.25 \cdot 3000,\ 0.75 \cdot 0),$$

ただし、結果の数値における単位はイスラエル・ポンドである（図９－１を参照せよ）。

図　９　－　１



そして、つぎのような質問が95人対して示された；

質問１：“くじ”l_1と“くじ”l_2のどちらを選好しますか。

質問２：“くじ”l_3と“くじ”l_4のどちらを選好しますか。

その結果、質問１では、“くじ”l_1を選好した人々は20％あり、残り80％の人々は“くじ”l_2を選好した。また、質問２では、“くじ”l_3を選好した人々は65％あり、残り35％の人々は“くじ”l_4を選好した。

“くじ”l_3と“くじ”l_4は

$$l_3 = 0.25 \cdot l_1 \dotplus 0.75 \cdot l_0$$

$$l_4 = 0.25 \cdot l_2 \dotplus 0.75 \cdot l_0$$

と書き換えられる、ただし、 l_0 はゼロポンドを確率１で与える“くじ”である。そのとき、独立性公理、あるいは、式（9．1）によれば、もし $l_2 \succsim l_1$ であるならば、そのとき

$$l_4 = 0.25 \cdot l_2 \dotplus 0.75 \cdot l_0 \succsim 0.25 \cdot l_1 \dotplus 0.75 \cdot l_0 = l_3$$

でなければならない。しかしながらKahneman-Tversky は言う；“我々の被験者（subjects）はこの公理に従わない。”

すなわち、 $l_2 \succ l_1$ であるにもかかわらず、 $l_3 \succ l_4$ なる現象が生じることは否定できない。彼らによれば、意思決定者には、リスク的な結果よりも確実な結果を過度に重視する傾向が存在する（Kahneman-Tversky, 1979, p. 265)。この傾向は**確実性効果**（certainty effect）と呼ばれている。また類似の問題が神戸大学経済経営研究所内の22人に示されたところ、この確実性効果がKahneman-Tversky の場合よりも顕著に現れた。確実性効果は意思決定者が必ずしも確率演算のルールに従って行動しないことを示している。

第10章　パラドックス

1. はじめに

数多くの実験的ならびに実地的（field）研究の結果は期待効用が記述的な妥当性を有しているということを示していない（Schoemaker, 1982)。それらの中で最も有名な例は**Allaisのパラドックス**と呼ばれるものである。この例は2つの“くじ”のどちらを選好するかという問題を2組有している。各々の問題において最も選好される“くじ”を意思決定者に選ばすとき、多くの意思決定者がとった選好行動は独立性の公理を犯すことが報告されている。すなわち、多くの意思決定者は期待効用最大化原則に反している。

いま述べたように、Allaisのパラドックスは独立性の公理の妥当性を攻撃しているものと一般的にはみなされている。しかしながら、本章の2節で議論するように、独立性の公理そのものは直接に非難されてはいない。すなわち、Allaisが提示する“くじ”に対する選好は他の公理(混合集合の条件を含む)の適用の後に独立性の公理に反する結果を生みだす。

2節では、独立性の公理からではなく、我々の主眼たる初期条件の視点からAllaisのパラドックスを検討している議論を紹介しよう。2－1節では、Allaisのパラドックスならびにそれが独立性の公理に対する反例となっている事情などが解説される。2－2節では、このAllaisの主張に対して、規範的解釈から期待効用を弁護する典型としてSavageの議論を紹介しよう。

2－3節では、Allaisのパラドックスにおいて独立性の公理と一貫していないとみなされている選好行動が、視点を変えることによって、実は、独立性の公理に反していないとするMorrisonの議論を展開しよう。そのとき、変えられた視点とは意思決定者の初期条件である。しかしながら、このMorrison

の議論にはリスク的初期条件に対する認識の不足がある。この点について簡単な注釈が加えられる。

2－4節における Machina の議論では、選択対象ならびに初期条件が変るとき、それにつれて効用関数も変るとされている。我々が抽出した Machina の3つの特徴づけの中で、3番目のそれは意思決定者の選好が初期条件に依存していることを特に顕著にさせている。

一方、Allais のパラドックスに反して、**Fukuba のパラドックス**は実験的または実地的証拠から引きだされた問題ではない。これは期待効用理論が論理的な明瞭性を欠いていることを指摘している例とみなされる。リスク的初期条件が確実等価額またはある確実な金額として評価されうるのか。リスク的初期条件を確実等価額によって評価することは不当であるのか。期待効用理論にはこの疑問に対する解答は用意されていない。この不明瞭性が Fukuba のパラドックスに導く源である。

さらにさかのぼれば、リスク的初期条件はそれの確実等価額が初期条件とされたときより一般的に大きな期待効用を選択対象に与える。これはリスク・プレミアムの作用による結果である。確実等価額の概念はどのような状況において有効なのか。あるいは、常に有効であるとしうるのか。この問題に対する明確な処方が提示されなければ、そのとき現実の決定問題に直面している意思決定者は暗闇の中をさまよわなければならない。さらに、期待効用理論が現実の決定問題に対してどのような応用性をもつのかという点に関しても、Fukuba のパラドックスは疑問を投げかけている。

2. Allaisのパラドックスに関する議論

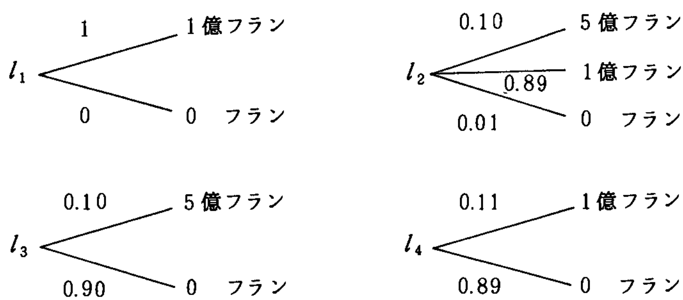
2－1 Allaisのパラドックス

このパラドックスは、1952年、フランスのパリにおけるリスクに関するコロキアム（colloquium）でこれを提示したフランスの経済学者Maurice Allais

に因んで“Allaisのパラドックス“と呼ばれている（Allais,1979,p.446)。この反例に対して、コロキアムに出席していたL. J.Savage、P.A. Samuelsonなど有名な研究者が期待効用の公理系と矛盾する返答をなしたと報告されている（Allais, 1979, p.103, p.535)。

さて、つぎのような4つの“くじ”を考えよう。“くじ”l_1は意思決定者に1億フランを確率1で与え、“くじ”l_2は5億フランを確率0.1で、1億フランを確率0.89で、ゼロフランを確率0.01で与え、“くじ”l_3は5億フランを確率0.1で、ゼロフランを確率0.9で与え、“くじ”l_4は1億フランを確率0.11で、ゼロフランを確率0.89で与えるとしよう。

図 10－1



そのとき、状況Iでは意思決定者は“くじ”l_1か“くじ”l_2のどちらかを選好しなければならないとし、状況IIでは“くじ”l_3か“くじ”l_4のどちらかを選好しなければならないとしよう。大半の意思決定者は状況Iでは“くじ”l_2より“くじ”l_1を選好し、状況IIでは“くじ”l_4より“くじ”l_3を選好する傾向がある。そのとき、$l_1 \succ l_2$、かつ $l_3 \succ l_4$ なる選好は期待効用の公理系に矛盾する。つぎにこの矛盾を示そう。

さて、“くじ”l_0はゼロフランを確率1で与えるものとしよう。そして“くじ”l_5は5億フランを確率10/11で、ゼロフランを確率1/11で与えるとしよう。

図　10－2

そのとき

$$l_1 = 0.11 \cdot l_1 \dot{+} 0.89 \cdot l_1 \qquad (10.\ 1)$$

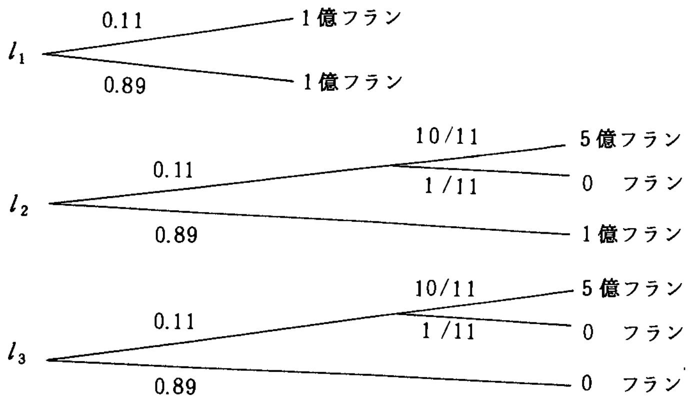
$$l_2 = 0.11 \cdot l_5 \dot{+} 0.89 \cdot l_1 \qquad (10.\ 2)$$

$$l_3 = 0.11 \cdot l_5 \dot{+} 0.89 \cdot l_0 \qquad (10.\ 3)$$

$$l_4 = 0.11 \cdot l_1 \dot{+} 0.89 \cdot l_0 \qquad (10.\ 4)$$

と表現することが可能である（図10－3を参照せよ）。

図　10－3



そしてFergusonの公理F2によれば、$l_1 \succ l_2$、すなわち

$$0.11 \cdot l_1 \dot{+} 0.89 \cdot l_1 \succ 0.11 \cdot l_5 \dot{+} 0.89 \cdot l_1 \qquad (10.\ 5)$$

であるならば、そのとき $l_1 \succ l_5$ となる。さらに、公理F2によれば、任意の“くじ” l に対して $l_1 \succ l_5$ であるならば，

$$0.11 \cdot l_1 \dot{+} 0.89 \cdot l \succ 0.11 \cdot l_5 \dot{+} 0.89 \cdot l \qquad (10.\ 6)$$

が成立しなければならない。したがって期待効用の公理系によれば $l_4 \succ l_3$ でなければならない。それにもかかわらず、多くの意思決定者は $l_3 \succ l_4$ である

ことを要求する。これがAllaisのパラドックスである。

2－2　Savageの議論

前節のAllaisのパラドックスに対して、Savage（1954, p.101-103）は以下のような議論を展開した。まず、“くじ”における、それぞれの金額は1952年のフランとドルの為替換算率1ドル/200フランによってドルに換算されている（Allais, 1979, p.534）。

状況Ⅰ　“くじ”l_1と“くじ”l_2のどちらかを選びなさい。

l_1：50万ドルを確率1で与える。

$l_1 =$（1・50万，0・0）

l_2：250万ドルを確率0.1で、50万ドルを確率0.89で、0ドルを確率0.01で与える。

$l_2 =$（0.1・250万，0.89・50万，0.01・0）

状況Ⅱ　“くじ”l_3と“くじ”l_4のどちらかを選びなさい。

l_3：250万ドルを確率0.1で、0ドルを確率0.9で与える。

$l_3 =$（0.1・250万，0.9・0）

l_4：50万ドルを確率0.11で、0ドルを確率0.89で与える。

$l_4 =$（0.11・50万，0.89・0）

もし意思決定者が状況Ⅰでは“くじ”l_1を選び、状況Ⅱでは“くじ”l_3を選ぶならば、そのとき彼の選好は期待効用の概念と矛盾する。事実、任意の効用関数uに対して、$l_1 \succ l_2$、かつ$l_3 \succ l_4$は

u（50万）＞0.1 u（250万）+ 0.89 u（50万）+ 0.01 u（0）　(10. 7)

かつ

0.1 u（250万）+ 0.9 u（0）＞0.11 u（50万）+ 0.89 u（0）　(10. 8)

を意味するが、これらは明らかに両立しない。多くの意思決定者がこのような選好をなすことをSavage（1954, p.102）は認めている。

そしてSavage (1954, p.102) はつぎのように言う；"一般に、規範的理論を試みに受け入れた人はその理論が彼を迷わすように導いているとみられる状況を誠実に検討しなければならない；彼は、再考（演繹はほとんど関係しない）によって、その状況に対する始めの印象を保持するか、理論の含意を受け入れるかどうかを決めなければならない。"

すなわち、期待効用に矛盾したこのような選好が生じた場合に意思決定者がとりうる立場はつぎの２つになるであろう；

（その１）熟慮した後、なおもその矛盾した選好を欲するならば、そのとき意思決定者は期待効用を放棄しなければならない。

（その２）期待効用を規範として受け入れ、矛盾した選好を期待効用に適合するように、意思決定者は選好を変更しなければならない。

そのとき、Savageは（その２）の立場をとる。すなわち、状況Ⅰと状況Ⅱが、最初、提示されたとき、彼は"くじ" l_2 より"くじ" l_1 を選好し、"くじ" l_4 より"くじ" l_3 を選好したが、彼の公理系と**個人的趣向**に照して検討した結果、状況Ⅱでは"くじ" l_3 より"くじ" l_4 を選好するように変更した。

註：状況Ⅰと状況Ⅱのそれぞれにおいて、"くじ" l_1 と"くじ" l_4 を選好することが、ある意思決定者にとって、正しい判断であるというような議論は成立しない。なぜならば選好そのものは主観的判断である。Savageが選好を変更した理由は、状況Ⅰでは"くじ" l_1 を選好することが彼の趣向からみて動かし難いと考え、状況Ⅱでは"くじ" l_1 を選好したという事と公理系の両者に矛盾しないように決めること、それであった。一方、ある意思決定者が状況Ⅱにおいて"くじ" l_3 を選好したことを基礎にすべきであると考えるならば、そのとき公理系に矛盾しない選好は状況Ⅰにおいて"くじ" l_2 を選好することである。さらに、仮に期待効用を規範として受け入れたとしても、状況Ⅰにおける選好と状況Ⅱにおける選好の

どちらが意思決定者の選好態度を正しく反映しているかという判断が要求されている。言い換えると、別次元における選好問題が生じている。

2－3　Morrisonの議論

パラドックスを解くためにMorrison（1967）は初期条件を導入した。まず、彼は“くじ”を売ることが許されないと仮定している。そして、意思決定者の**初期条件**（Morrisonは資産状態（asset position)と呼ぶ）は物財的保有、現金、株、公債、その他諸々を含むが、多くの意思決定者にとってこれらは1億フランに較べるとわずかなものにすぎないゆえに、初期条件はゼロと仮定される。

註：Morrisonが Allaisのパラドックスを説明するために使っている金額はSavageにおけるドル表示の2倍となっている。煩雑さを避けるために、我々はAllaisが使用した金額で説明しよう。ただし、当時の1億フランあるいは50万ドルという金額が、現在、多くの意思決定者の資産をゼロとみなしうるほど巨額であるかどうかは疑問のあるところである。

以下のような理由によりMorrison（1967, p. 378)は初期条件を導入する：「“くじ”l_1では我々には1億フランが保証されている。もし“くじ”l_2をとりあげるならば、我々は5億フランを得るかもしれないが、我々がゼロで終るチャンスもある。しかしこのゼロは意思決定者にとって初期条件としてのゼロ(“くじ”l_2を実施する以前の状態)と同じであろうか？　否な！　1億フランが指の間からすべり落ちたという考えは最も幸せな人を気むずかしくさせるに充分である。」

すなわち、状況Ⅰでは意思決定者は、望むならば、1億フランを保証されている。それゆえに、意思決定者の初期条件はゼロから1億フランに変化し、図

10—4で示されるような“くじ”l_1^a、l_2^aに彼は直面しているとみなされうる。一方、状況Ⅱでは意思決定者は“くじ”を売ることができないゆえに、彼の初期条件はゼロであり、図10—5で示される“くじ”l_3、l_4に彼は直面しているとみなされる。

このような議論からMorrisonはつぎのような結論を一応導きだす：

（i） 意思決定者の効用は初期条件によって影響される。

（ii） 状況Ⅰ（ただし図10—4における状況を指す）における意思決定者の初期条件、1億フラン、は状況Ⅱにおける彼の初期条件、ゼロ、とは異なる。

（iii） それゆえに、状況Ⅰと状況Ⅱは比較できない。

図 10—4

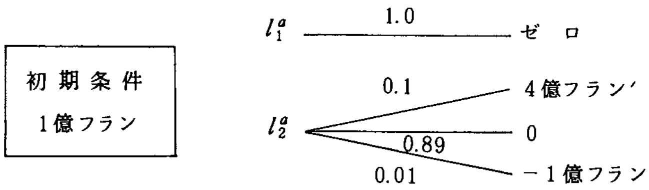
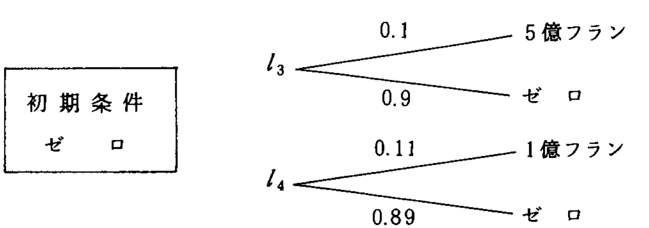


図 10—5



そして、さらにつぎの3つの仮定をおく；

(1) “くじ”の結果、5億フラン、の効用は、初期条件がゼロであれ、1億フランであれ、同じである。同様に、“くじ”の結果、1億フラン、の効用は、初期条件がゼロであれ1億フランであれ、同じである。

(2)　初期条件として1億フランを保有しそれを全て失うことは、ゼロで出発し、ゼロで終ることより望ましくない。

(3)　1億フランから5億フランへ移行することをC^*とし、1億フランからゼロへ移行することをC_*としよう。記号的には$C^*=$(1億→5億)、$C_*=$(1億→0)としよう。初期条件ゼロで1億フランを得ること、(0→1億)とゼロでとどまること、(0→0)は

$$C^* \succ (0 \to 1億) \succ (0 \to 0) \succ C_*$$

であるゆえに、連続性の公理により

$$(0 \to 1億) \sim \alpha_1 \cdot C^* \dot{+} (1-\alpha_1) \cdot C_*$$

$$(0 \to 0) \sim \alpha_0 \cdot C^* \dot{+} (1-\alpha_0) \cdot C_*$$

なるα_0、$\alpha_1 \in (0,\ 1)$が存在する。

これら3つの仮定は記号的には図10―6で示されるようになる。

図　10 ― 6

(1)　$(0 \to 5億) \sim (1億 \to 5億) \succ (0 - 1億)$
$\sim (1億 \to 1億)$

(2)　$(0 \to 0) \succ (1億 \to 0)$

(3)　$(0 \to 1億) \sim \begin{cases} \xrightarrow{\ \alpha_1\ } C^* \\ \xrightarrow[\ 1-\alpha_1\ ]{} C_* \end{cases}$

$(0 \to 0) \sim \begin{cases} \xrightarrow{\ \alpha_0\ } C^* \\ \xrightarrow[\ 1-\alpha_0\ ]{} C_* \end{cases}$

註：仮定(1)と仮定(2)の両立には理解しがたい点がある。例えば、仮定(2)における(0→0)≻(1億→0)が成立するならば、そのとき(0→1億)≻(1億→1億)であるようにみえる。しかし我々はこれらの仮定を便宜

上の単純化として好意的に解釈しておこう。

これらの仮定のもとで、図10－4における状況は図10－7のそれと同値になる。そのとき、“くじ” l_1'' はC*を確率 α_1 で与え、“くじ” l_2'' はC*を確率（$0.1+0.89\alpha_1$）で与える。したがって、$l_1 \succ l_2$ なるための必要充分条件は $l_1'' \succ l_2''$ であり、$l_1'' \succ l_2''$ であるための必要充分条件は

$$\alpha_1 > \frac{10}{11}$$

である。

一方、図10－5は図10－8と同値になる。そのとき、“くじ” l_3'' はC*を確率（$0.1+0.9\alpha_0$）で与え、“くじ” l_4'' はC*を確率（$0.11\alpha_1+0.89\alpha_0$）で与える。それゆえに、$l_3'' \succ l_4''$ なるための必要充分条件は

$$10/11+1/11\cdot\alpha_0 > \alpha_1$$

となる。

図　10－7

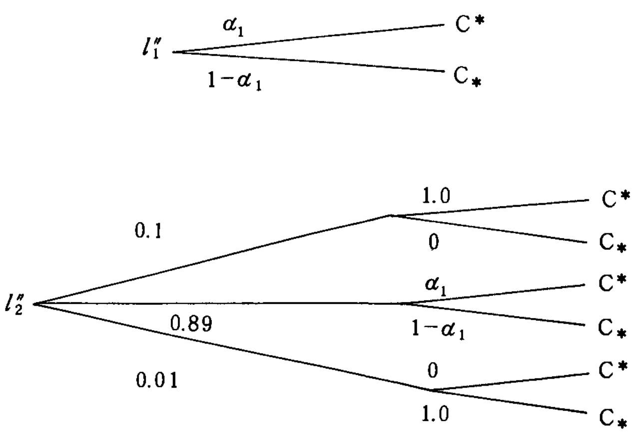
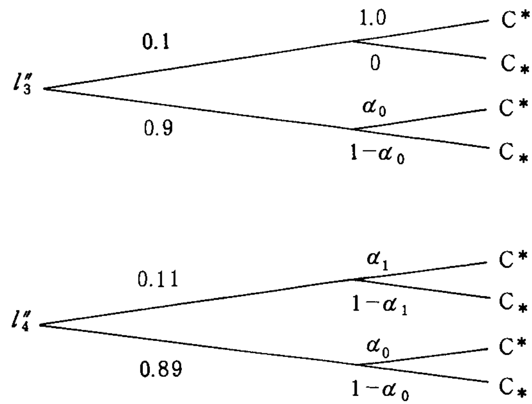


図　10－8



状況Ⅰと状況Ⅱにおいて$l_1 \succ l_2$、かつ、$l_3 \succ l_4$ なるための必要充分条件は

$$10/11 + 1/11 \cdot \alpha_0 > \alpha_1 > 10/11 \qquad (10.\ 9)$$

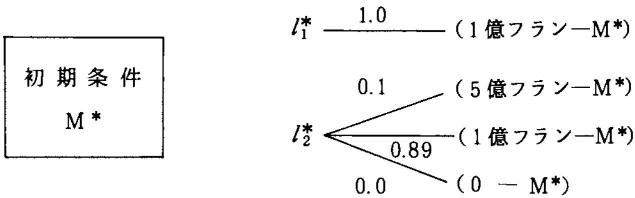
となる。不等式（10. 9）を満たすα_0とα_1では、"くじ" l_1と"くじ" l_3を選好することは矛盾でないとMorrisonは結論づける。

さらに、"くじ" l を売ることが許されるならば、その"くじ" l の**市場価値**により意思決定者の初期条件がゼロからMVに移行させられるとMorrisonは考える。例えば、"くじ" l_2 の市場価値をMVとし、

$$M^* = \max\{\text{MV},\ 1\text{億フラン}\}$$

としよう。そのとき、状況Ⅰは図10－9で示されているように変る。しかしながら、一般的には"くじ" l_2 の確実等価額 x^*がMVより大であるならば、この分析は実行不可能である。なぜならば、確実等価額 x^*は"くじ" l_2 に対する意思決定者の売値であり、市場価値MVより大である。

図　10－9



しかしながら、“くじ” l_2 を市場価値で評価すること、ならびに、確実等価額で評価することの不当性については、本書の第4章、第5章で、長々、議論してきたところでもあり、この場で、さらに、この点を解説することは省くことにしよう。

2－4　Machina の議論

Allais のパラドックスが生じてくる原因として Machina (1982) は以下で紹介する3つの特徴づけを挙げている。

註：期待効用におけるいくつかの問題点（Allais のパラドックスを含む）を解決する意図で Machina (1982) が提示しているモデルは期待効用の場そのものから外れている。したがって、本節では Machina のモデルに関する議論を省くことにする。なお、Machina のモデルに対する詳細な解説については、福場—伊藤—田畑—坂上 (1983) を参照されたい。

(1)　状況Ⅰで “くじ” l_1 が選好され、状況Ⅱでは “くじ” l_3 が選好されるとき、期待効用の概念と矛盾しない効用関数は、前述のように、存在しない。そのとき、Machina は、まず、“くじ” l_1 が “くじ” l_4 を確率支配し (stochastically dominate)、“くじ” l_2 が “くじ” l_3 を確率支配していることを指摘する。

註：関数 $F(x)$と$G(x)$はX上で定義された分布関数としよう。そのとき、もし全ての $x \in X$に対して

$$G(x) \geq F(x)$$

であるならば、分布関数$F(x)$は分布関数$G(x)$を一次確率支配（first-order stochastically dominate）していると言われる。上述の**確率支配**は一次確率支配の意味である。

さらに、効用関数uが $l_1 \succ l_2$ （$l_3 \succ l_4$）と順序づけるための必要充分条件は、

0.01 u (ω) − 0.11 u（ω+ 1 億）+ 0.1 u（ω+ 5 億）が負（正）であること、すなわち、1億フランを確実に受けとることが5億フランを確率 10/11で受けとることより選好されること（選好されないこと）であると指摘されている。ただし、ωは意思決定者の初期条件である。

註：この指摘の前半部分は式（10. 7）と式（10. 8）が示すところである。また後半は式（10. 5）と式（10. 6）によって示されている。この後半の指摘のためには独立性の公理が使われていることに注目されたい。

したがって、確率支配している“くじ”、すなわち、l_1、l_2 を評価するさいに、意思決定者は、確率支配された“くじ”、すなわち、l_3、l_4を順序づけるのに使われた関数よりリスク回避的な効用関数に従って行動する（Machina, 1982, p.288）。

(2) いま、Eを確率0.11で起こる事象とし、～Eをそれの補事象としよう。そのとき、式（10. 1）、（10. 2）、（10. 3）、（10. 4）から理解されるように、“くじ” l_1、l_2、l_3、l_4 は、事象Eが生じたならば、それぞれ l_1、l_5、

l_5、l_1 を与え、事象～Eが生じたならば、それぞれ l_1、l_1、l_0、l_0 を与える。そこで、事象Eが生じたという前提での“くじ” l_5に対する確実等価額x^*（l_5 / E）はEにおける“くじ” l_5の**条件付確実等価額**と呼ばれている。

事象Eに関する条件付確実等価額 x^*（l_5/E)は補事象～Eが生じたとき得られる“くじ”の結果とは独立であると言うこと、これが独立性の公理の内容である。しかし、状況Iと状況IIにおける、$l_1 \succ l_2$ と $l_3 \succ l_4$ はつぎのことを意味する；～Eが1億フランを与えるときには、x^*（l_5/E）は1億フランより小さく、～Eがゼロを与えるときには、x^*（l_5/E）は1億フランより大きい。

このように、～Eにおける金額の増大（一般的には、～Eの所与での条件付分布における確率支配的移動）は“くじ” l_5の条件付確実等価額 x^*（l_5/E）を小さくする。したがって、事象Eが生じたならば、意思決定者が多く失えば失うほど（すなわち、補事象～Eでの金額が増大すればするほど）、Eにおける“くじ” l_5を評価するさいに意思決定者は、増々、リスク回避的になる（Machina, 1982, p.289）。

(3)　“くじ” l_1から“くじ” l_2へ、あるいは、“くじ” l_4から“くじ” l_3への確率の移動に注目するとき、それらはいずれも（ω＋1億）から（ω＋5億）へ確率0.10を移動させ、かつ、（ω＋1億）からωへ確率0.01を移動させていることとみなされうる。“くじ” l_1に注目するとき、確率0.1を（ω＋1億）から（ω＋5億）へ移動させることは（ω＋1億）からωへの確率0.01の移動を補償するに充分でない。したがってそのような確率の移動は選好されない（$l_1 \succ l_2$)。しかしながら、“くじ” l_4に注目するとき、“くじ”の結果としてのωはもはや初期条件（すなわちω）から離れた“**遠隔の事象**(outlying event)”ではない。なぜならば（l_1 に比較して）その確率（“くじ“の結果としてωが生じる確率）は0から0.89まで大きくなっている。それゆえに、（ω＋1億）を犠牲にする確率0.01の移動に対して意思決定者はもはやそれほ

ど敏感ではなく、確率0.01のωへの移動は確率 0.1 の（ω＋5億）への移動によって充分に補償される。したがってそのような確率の移動は選好される（$l_3 \succ l_4$）。

言い換えると、注目すべき“くじ”をl_1からl_4に変えることは、ωと（ω＋1億）に比較して、“くじ”の結果たる（ω＋5億）を“より遠隔”にしているとみなされる。なぜならば、確率 0.1 は変わらないけれども、l_1 からl_4に変えたとき確率0.89は（ω＋5億）から遠く離れた所（すなわちω）へ移動している。このように、“くじ”l_1 におけるよりも“くじ”l_4 においてより“遠隔な事象”になっている（ω＋5億）に関して、意思決定者は確率 0.1 の変化に対して、一層、敏感になり、（ω＋1億）から（ω＋5億）への確率0.1の移動は（ω＋1億）からωへの確率0.01の移動を補償するに充分である。結論としてMachina（1982, p.290）は言う；「・・・小さな確率を有する“遠隔事象”における確率の変化に対して意思決定者は過度に敏感である傾向が存在する・・・」

註：式（9．2)、(9．3）で定義された“くじ“l_2、l_3に関して議論したように、確率と金額（あるいは確実同値額）の交換（trade-off）比率がある意思決定者にとっては固定されていない。この事実を、焦点を絞り、言い換えたものがMachina の特長づけ(3)であるようにみえる。

3.　Fukubaのパラドックス

多重くじの**相互依存性**の視点から期待効用に対するパラドックスが Fukuba によって提示されている（Fukuba-Ito, 1980)。以下、我々はこの Fukuba のパラドックスを紹介しよう。

二人の意思決定者、AとBは同じ効用関数 $u(x)=\log x$ を持っているとしよう。そして、意思決定者Aは現金 x_0 = 100（単位）と“くじ”l_1 =（0.5・10,

0.5・140）を持ち、意思決定者Bは“くじ” l_2 =（0.94・20, 0.06・18×10^7）を持っている。そのとき、

$$u(x_0 * l_1) = 5.091$$

$$u(x_0) = 4.605$$

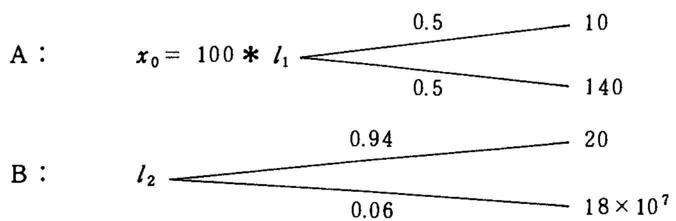
$$u(l_1) = 3.622$$

$$u(l_2) = 3.956$$

$$x^*(l_2) = 52.274$$

であることに注意しておこう。ただし $x^*(l_2)$ は“くじ” l_2 の確実等価額である。すなわち $u(l_2) = u(x^*(l_2))$ である。

図　10－10



ここで、意思決定者Aの x_0 = 100 はなんらかの投資に使うことができる資金であり、一方意思決定者Bの“くじ” l_2 は、もし可能であるならば、売却することができる資産である。そして“くじ” l_2 の売値は確実等価額の意味から $x^*(l_2)$ = 52.274 である。

註：“くじ” l_2 はかなり異常な形をなしているようにみえる。すなわち、“くじ”の結果、20と18×10^7の差が極度に大きい。しかしながら、この“くじ”の異常性は議論の本質に係るものではない。パラドックスの特徴を顕著にするために、“くじ” l_2 が選ばれたにすぎない。多重くじにおけるリスク・プレミアムの重要性を例証すること、それが“くじ” l_2 の使用

の理由の一つである。

そこで、Fukuba のパラドックスを成立させ、異常な形をしていない一組の“くじ”の例を示しておこう。もし $x_0=80$、$l_1=(0.5\cdot 10,\ 0.5\cdot 140)$、$l_2=(\frac{1}{3}\cdot 30,\ \frac{2}{3}\cdot 120)$ であれば、$u(x)=\log x$ では

$$u(x_0 * l_1)=4.94672,\qquad x^*(x_0 * l_1)=140.713、$$
$$u(l_1 * l_2)=4.99456,\qquad x^*(l_1 * l_2)=147.608$$
$$u(l_2)=4.32539,\qquad x^*(l_2)=75.5952$$

となる。そのとき、l_2 の取引価格を80とすれば、以下で示す主張1と主張2の成立が容易に検証されうる。

さて、意思決定者Aは意思決定者Bに“くじ” l_2 を価格100で購入することを提案したと仮定しよう。もし意思決定者Bがこの提案に同意するならば、売買取引の後に、意思決定者Aは“くじ” $l_2 * l_1$ を所有し、意思決定者Bは現金 $x_0=100$ を所有する。その結果、意思決定者Aの効用は $u(l_2 * l_1)=5.124$ （$u(x_0 * l_1)=5.091$）となり、意思決定者Bの効用は $u(x_0)=4.605$ （$u(l_2)=3.956$）となる。このように、両者、AとBはともに取引によって一層高い効用を享受する。この事実からつぎのような主張が考えられる。

主張1：AとBは取引をすることができる。

一方、この主張と対称的な、つぎのような主張も正当化されうる。

主張2：AとBは取引をすることができない。

主張2を正当化する根拠は、粗く言って、つぎのようになる；意思決定者A、Bを納得させることができるような一般的取引ルールを見い出すことが困難である。以下、この根拠に関して詳細に議論しよう。

さて、意思決定者、AとBは **Nash** 解によって取引を成立させることに同意していると仮定しよう（Nash の定式化に関する解説には Luce-Raiffa,1957, p.124を参照されたい）。そのとき、取引は2人協力ゲーム（ two person cooperative game）となる。いま、

$$L_A = (x_0 - \theta) * l_2 * l_1$$

$$L_B = \theta$$

としよう。取引はつぎの式（10. 10）の解θ^*（l_2 の取引価格）を見い出すことによって成立させられるという主張がありうる；

$$\max\ u\,(L_A)\ u\,(L_B) = \max_{\theta}[\,0.03\log(180000240-\theta)(180000110-\theta) + 0.47\log(260-\theta)(130-\theta)\,]\log\theta \qquad (10.\ 10)$$

ただし、$\theta \in [\,52.274, 100\,]$ である。

他方、意思決定者Bは、“くじ” l_2 と現金を交換するために、l_2 を $x^*(l_2)$ と評価する。同様に意思決定者Aは取引前の資産 $x_0 * l_1$ を $x^*(x_0 * l_1) = 162.552$ と評価する。

いま

$$L'_A = (162.522 - \theta) * l_2$$

$$L'_B = \theta$$

としよう。そのとき、“くじ” l_2 の取引価格はつぎの式（10. 11）の解 θ^{**} になるべきであると主張されうる；

$$\max\ u\,(L'_A)\ u\,(L'_B) = \max_{\theta}[\,0.06\log(180000162.552-\theta) + 0.94\log(182.552-\theta)]\log\theta \qquad (10.\ 11)$$

ただし、$\theta \in [\,52.274,\ 100]$ である。

しかしながら、式（10. 10）と式（10. 11）から一見して、

$\theta \in [\,52.274,\ 100\,]$ に対して

$$\theta^* = \theta^{**}$$

と

$$\max\ a\ (\theta)\log\theta = \max\ b\ (\theta)\log\theta$$

が、成立するようにはみえない。ただし

$$a(\theta) = 0.03\log(180000240-\theta)(180000110-\theta) + 0.47\log(260-\theta)(130-\theta)$$

$$b(\theta) = 0.06\log(180000162.522-\theta) + 0.94\log(182.552-\theta)$$

事実、近似計算を行うと

$$\theta^{*} \fallingdotseq 87,$$

$$\theta^{**} = 100$$

であり、

$$a(\theta) < b(\theta)$$

となる。

そうして、期待効用の概念には、取引ルールとして、式（10. 10）と式（10. 11）のどちらが正当であるかを判断する規準はない。したがって、“くじ” l_2 の取引価格が決められないゆえに、意思決定者、AとBは取引をすることができない。

ここでは、Nashの定式化と効用関数 $u(x) = \log x$ によって議論されているが、効用関数が逓減リスク回避的関数を有するかぎり、単なる取引ルールの変更によってこのパラドックスの本質は変るものではない。すなわち、期待効用という尺度における問題点がこのパラドックスを生みだした。

しかしながら、第4章の議論からリスク的初期条件のもとでは逓減リスク回避的な効用関数は存在しないゆえに、これはパラドックスであると言えないかもしれない（Fkuba-Ito, 1984)。効用関数の存在が仮定されているときには、**Fukubaのパラドックス**が成立する。

第11章　総　　括

1. は じ め に

人間は満足を得るために行動する。しかし、その満足がどのような意味を指すかは直面している状況によって異なるであろう。すなわち、倫理的、利害的、友好的、長期的、短期的などのいくつかの形容詞が付加された満足が存在する。人間は満足を得るために行動するゆえに、その満足を大きくすることは、どのような意味であろうと、人間が追求する目的となりうる。我々にとって不明な価値体系が満足という尺度で測定されると仮定することができよう。

さらに、この満足は選好という現象により顕在化されると仮定しよう。期待効用は、リスク的な状況のもとで、顕在化されるまたは顕在化されるべき選好を表現するための手段である。この意味において期待効用が選好を決定するということではなく、選好を別の形に変換した便宜的、人工的概念である。換言すれば、人間の**内在的因子**ではなく、すなわち、人間の行動を刺激する因子ではなく、選好を表現するには便利な道具であること、これが期待効用の本質であると言われている（Luce-Raiffa, 1957, p.31)。

本書の研究主題は期待効用理論の批判である。この期待効用理論はつぎの２つの要素から成立するものとして第１章で定義された；（その１）期待効用定理、（その２）リスク回避関数を核とするリスク回避理論。期待効用は、普通、規範的視点からの解釈と記述的視点からの解釈をもつと言われている。本書で議論された研究内容は期待効用のこれら２つの解釈のいずれにも関連している。

期待効用理論に対する従来の非難は主として記述的妥当性に関する疑念から生じている。その非難に対して期待効用をよしとする人々は規範的解釈からその理論を弁護する。すなわち、期待効用の公理系は意思決定者の選好が満足す

べき合理性の基準とみなされるべきであると主張されている（第10章2－2節、参照)。一方、本書における議論は規範的解釈においてもいくつかの困難を指摘している。

本章で、期待効用理論に対する我々の批判を要約することにしよう。そのことに入る前に、つぎの2つの事項に対する注釈を加えておこう; (1)記述的意義と規範的意義の対立性、(2)リスク的初期条件とリスク回避関数。

(1)：もし意思決定者の選好行動が期待効用の最大化原則に従っているならば、すなわち、期待効用が記述的に有効であるならば、そのとき期待効用の規範的意義はほとんど失われてしまう。なぜならば、意思決定者は期待効用を指針として使用するまでもなく、意識することなしに期待効用の最大化を目的として行動していることになるからである。一方、期待効用の規範的意義が強調されるならば、すなわち、意思決定者は選択対象の選好において期待効用を最大にするような選択対象を選好すべきであると主張されるならば、そのとき期待効用の記述的能力はほとんど認められていないことになるであろう。なぜならば、期待効用が意思決定において有益な指針であると強調されることは、現実の意思決定者の選好行動がしばしば期待効用の最大化原則に反していることを意味しているからである。このように、期待効用における記述的意義と規範的意義は両立し難い概念である。

(2)：もし初期条件がリスク的であるならば、そのとき逓減リスク回避性は実質的な意味をもたない。なぜならば、リスク的初期条件における、逓減リスク回避性が定義されていない。換言すれば、リスク的初期条件の順位づけが定義されていないからである。そうではあるが、これそのものは効用関数の性質として逓減リスク回避性が存在しないことを指していることにならない。すなわち、効用関数がもつことのできる性質の一つが逓減リスク回避性である。誤解を避けるためにつぎのことを確認しておこう。

我々の意図には、リスク回避的な効用関数がリスク的初期条件では何をもた

らすかを吟味すること、これが含まれている。そして、リスク回避的な効用関数はリスク回避関数によって特徴づけられるが、その一つが逓減リスク回避性である。意思決定者がそのような性質を有する効用関数によって期待効用を算定しようとするとき、リスク的初期条件のもとでは期待効用の概念には疑念が生じること、これが我々の結論である。

なお、Ross（1981）、Kihlstrom-Romer-Williams（1981）、Machina（1982）のように、リスク的初期条件のもとでの逓減リスク回避を定義することは可能である（第3章4－4節、参照）。しかしながら、それらはまた別の話であり、我々の議論を損なうものでもない。

2. 期待効用の定義

初期条件がリスク的であるとき、期待効用を算定すべき対象は多重くじとなる。第4章の2節と3節では、多重くじの重要な性質として可換半群性と相互依存性が指摘された。意思決定者がリスク的初期条件 l_0 を有するとき、ある“くじ” $l=(p_1\cdot x_1,\ p_2\cdot x_2)$、$p_1+p_2=1$、$p_1$、$p_2>0$、$x_1$、$x_2\in X$ から生じる結果は x_1*l_0 か x_2*l_0 のどちらかとなる。ただしXは確実な結果の集合である。

一方、期待効用定理では、初期条件 l_0 に関係なく、選択対象の集合Ωの要素に対して意思決定者が公理系を満足するような選好を表示できるならば、そのときその選好を表現するような効用関数uの存在が保証されると言われている。その場合、期待効用の算定は確実な結果の集合Xの上での効用、例えば100万円の効用、を基礎にしている。

しかしながら、多重くじ l_0*l において、“くじ” l から意思決定者に実現される結果は x_1*l_0 か x_2*l_0 であり、多重くじの可換半群性から論理的に確実的な結果になりえない。したがって、リスク的初期条件のもとでは、期待効用は算定不可能である。これは第4章4－1節において議論された。

意思決定者が$x_1 * l_0$と$x_2 * l_0$に対する効用を直接に定めることができるならば、期待効用ではなく、線型効用として“くじ”lの効用を決定することは可能である(第7章2−2節、参照)。意思決定者が$x_1 * l_0$と$x_2 * l_0$の効用を直接に定めるという意味は初期条件l_0の詳細を知ることなしにそれがなされるということである。しかしながら、そこには大きな問題が残っている。すなわち、多重くじの**相互依存性**がそれである。

増分型分析のように、初期条件l_0が確実等価額$x^*(l_0)$と評価されるならば、多重くじの相互依存性が無視されることになる。多重くじの相互依存性が認識され、精密な分析が要求されているとき(規範的視点では必然的にこれが要求されている)、初期条件を正確に知ることは期待効用の算定にとって避けられない重要な過程である。集合$l_0 * \Omega$では、期待効用が存在しないことは上で述べられた。この困難を克服するために、想像可能な初期条件の全てを含む集合Ω_0(=Ω)の存在を仮定しよう。

集合$\Omega_0 * \Omega$の要素に対して公理系を満たすような選好が示されるならば、期待効用定理は効用関数vの存在を保証する。そのとき、関数vは集合$l_0 * \Omega$の要素に数値を与える(第4章4−2節、参照)。そして、この関数vは想像可能な全ての初期条件のもとで選択対象の集合Ωに選好順位を与えることを意図している。すなわち、裸一貫から巨万の富(リスク的であるかもしれない)を有する状態までの全ての初期条件における意思決定者の選好がこの関数vによって表現されるとされている。換言すれば、関数vは意思決定者が足を踏み入れることのできない別世界をも表現しようとしている。

効用関数あるいは選好を決定する要因がなにであるかについて期待効用理論はなにも言及していないし、また、なにかを言及する意図も有していない。ある意思決定者では初期条件がその要因の一つであるかもしれない。上述の効用関数vはこの可能性を否定する。

選好は、しばしば、意思決定者の趣向(tastes)の問題であると言われてい

る（第10章２－２節、参照）。意思決定者が置かれている環境（初期条件を含む）が彼の趣向とは無関係であるとは言い難い。この効用関数 v は一体なにを表現しているのか、どのような前提または場のもとでこの関数 v は意思決定問題で有効になるのであろうか。従来の期待効用理論にはこの関数 v についての議論は存在しない。

3. 線型変換までの一意性

期待効用定理では、初期条件が不確実であれ、リスク的であれ、確実であれ、意思決定者が選択対象の集合Ωに対して公理系を満たすような選好を示すならば、彼の選好を表現する効用関数uの存在が保証されている。しかしながら、初期条件がリスク的であり、意思決定者が逓減リスク回避的であるならば、そのとき期待効用定理が保証する効用関数uの線型変換では初期条件型の分析は実現されない。

なぜならば。初期条件型の効用関数は $v(l_0 * l)$、$l \in \Omega$ であると仮定しよう。期待効用の付加条件によって効用関数は線型変換まで一意的であった。したがって、初期条件型の効用関数 $v(l_0 * l)$ が意思決定者の選好を表現しているためには

$$v(l_0 * l) = \delta \mathrm{u}(l) + \gamma, \quad l \in \Omega$$

が成立しなければならない。ただし $\delta > 0$、γ は任意の実数である。しかしながら、逓減リスク回避の場合では多重くじの相互依存性によって関数 $v(l_0 * l)$ は関数 $\mathrm{u}(l)$ の線型関数になりえない。このように、初期条件がリスク的であり、意思決定者が逓減リスク回避的であるならば、そのとき効用関数は**線型変換まで一意的**であるという主張は成立しない。したがって期待効用理論は内的一貫性を有していない（第５章２－２節、参照）。

4. 増分型と初期条件型

選択対象に対する意思決定者の選好が初期条件によって影響されること、これは期待効用を非常に有益な概念であると考えている人々にも認められているようにみえる。リスク回避関数の議論が広く受け入れられていることはこの証拠の一つであろう（ただし、この場合、初期条件が効用関数に与える影響は単なる関数のシフトと考えられている）。さらに、リスク的選択対象の期待効用が算定されるとき、期待効用の分析は初期条件型であるべきである、すなわち、リスク的選択対象から生じる利得あるいは損失にではなく、初期条件を含めた全体としての利得または損失の効用を算定すべきであると言う期待効用論者は存在する（Schlaifer, 1969, Lindley, 1971）。

しかし、彼らの議論には、初期条件のリスク性に慎重な配慮が払われている様子はうかがえない。初期条件を金額または単一財に換算せよという議論は見い出される。例えば、Arrow (1970, p.92)、Morrison (1967, 本書, 第10章2—3節、参照）は市場価格で、Schlaifer（1969）は市場価格または意思決定者の評価で、初期条件を金額に換算する方法を提案している。

もし初期条件がこのように確実な金額に換算されるならば、そのとき期待効用による分析方法は本質的に増分型となる(第5章2—2節、参照)。すなわち、初期条件が確実な金額であるとき、初期条件型によって選択対象の集合の要素に与えられる選好順位は増分型によるそれと同じである。実際、多くの文献で議論されている効用算定手続は増分型である。

しかしながら、リスク的初期条件のもとでの増分型、式（5．7）は確実的初期条件のもとでの増分型、式（5．5）とは異なる分析結果を与えるかもしれない。我々の議論によれば、効用関数が逓減リスク回避的であるとき、リスク的初期条件のもとでの増分型が選択対象に与える選好順位は確実的初期条件のもとでの増分型によるそれと一致しない。確実的初期条件のもとでの増分型では多重くじの相互依存性が選好順位の決定に介入する余地はない。一方、リ

スク的初期条件のもとでの増分型では、効用関数が一定リスク回避的でないならば、多重くじの相互依存性が選好順位の決定に影響を与える（5章2－2節、参照)。視点を変えて、選択対象の確実等価額から期待効用分析を吟味するとき、増分型、初期条件型は必ずしも同じ分析結果を与えない。(第5章2－3節、参照)。すなわち、もし効用関数が逓減リスク回避的で、初期条件がリスク的であるならば、増分型、初期条件型は、それぞれ、リスク的選択対象に異なる確実等価額を付与する。仮に、意思決定者の効用関数が与えられたとしても、上記の分析型式のどれが意思決定者に正確な確実等価額を与えるのか、期待効用の原則はこの点について明確な指示を与えていない。

さらに、効用関数が逓減リスク回避的であるとき、確実的初期条件のもとでの増分型の分析では無差別であるが、リスク・プレミアムが異なる2つの選択対象は初期条件型では無差別でなくなる。そのとき、期待効用論者の常識に反しているようにみえるが、リスク・プレミアムが大なる選択対象はリスク・プレミアムが小なる選択対象より大きい期待効用をもつという奇妙な事実がある（第4章3－2節、参照)。

5. 初期条件のリスク性と多重くじ

現実の世界における意思決定者は、常に、不確実な、あるいは、リスク的な環境にとりまかれていると言われうる。意思決定者の初期条件も、選択対象もそのような環境を構成する部分であることは疑問の余地を残さない事実である。そのとき、意思決定問題の考察範囲に初期条件のリスク性を含めることが有意義であるのかどうかということは検討に値する問題であろう。多重くじの相互依存性は原則としてそのことの必要性を明らかにしている。

したがって、リスク的初期条件のもとでは、多重くじの相互依存性を考慮するとき、原則として、意思決定者は多重くじ $l_0 * l$（$l \in \Omega$）に関する選好によって選択対象 $l \in \Omega$ の選好順位を決めるべきである。しかしながら、現実には

初期条件がリスク的または不確実であるとは考えられないと言う意思決定者は存在するだろう。

また、日常の微々たる意思決定問題では、多くの意思決定者は、初期条件を考慮することなしに、選好行動をなしているだろう。そのような状況においては、初期条件をとくに重視すべきであると主張する、強い根拠は見い出し難い。なぜならば、日常の微々たる意思決定問題における選好がどのような結果をもたらそうとも、それらは意思決定者が容易に修復可能であると考えているものか、意思決定者にとってそれほど重要でないと考えているものであろう。その場合、リスク的初期条件を考慮に入れた複雑な分析は分析コストという点から言って経済的でない（第7章3－1節、参照）。

もしある意思決定問題における意思決定者の選好が彼の人生、または、資産状況に大きな影響を与えると想定されるならば、そのとき意思決定者は選好行動に慎重な配慮を払うだろう。そして、リスク的初期条件のもとで意思決定者が多重くじの相互依存性を確認するならば、彼は選択対象の選好にリスク的初期条件を加味して行動すべきである。とくに、期待効用の規範的解釈のもとでは、多重くじ$l_0 * l$（$l \in \Omega$）に対する選好から選択対象l（$l \in \Omega$）の選好順位を決めるべきである（第5章3節、参照）。

6. 効用測定とそれの原点

公理系に反する、あるいは、移り気な決定をなす意思決定者の選好を基礎にして効用関数は推定されなければならない。そのような選好行動の原因は、例えばMarschak（1951）によれば、意思決定者の計算能力の不足（公理系にそくした選好をなす能力の不足という意味で）に帰着させられている。しかしながら、これは単なる計算能力の不足だけでなく、選好そのものが意思決定者にとって明確になっていないことにも関係している。

なぜならば、2つの選好の矛盾を公理系に照らして修正することは可能であ

る。しかし、それら２つの選好のどちらが意思決定者にとって正しい選好とするかは彼の趣向に依存していると言われているが、これも一つの選好問題となっている。この選好問題は計算能力によって解決されるものではない。

期待効用論者が言う、首尾一貫した、または、合理的な選好をなすためには、上で述べた、公理系に反しないことと正しい選好を決定すること、この２つが満たされていなければならない。首尾一貫した選好をなす能力は適切な訓練によって増大すると期待効用論者は考えている（Marschak, 1964, Savage, 1971）。しかし、彼らと言えども、どの選好が正しく意思決定者のそれを反映しているかを決めることの困難性を認めているようにみえる。選好行動の確率モデルを提示していることはそれを示す証拠であろう（Becker-DeGroot-Marschak, 1963）。

このモデルでは、ある意思決定者において選択対象 l_1 が選択対象 l_2 より大きい期待効用をもつための必要充分条件は l_1 を選択する確率が l_2 を選択する確率より大きいことであると定義されている。そのとき、全く同じ２つの選択対象が、続けて、意思決定者に何回か示されたとしても、意思決定者の選好が変る可能性はほとんどないであろう。したがって選好行動の確率モデルによる効用測定が実施されるとき、実験にはなんらかの工夫が必要とされる。

正しい選好を定めることの困難を克服するためのこのような手段は効用の測定を可能にさせるであろうか。リスク的初期条件のもとで、意思決定者の定性的制約が逓減リスク回避であるならば、そのとき推定された効用関数は推定されるべき効用関数にはならないだろう。

効用が測定されているかどうかの判定は測定されるべき効用の精度に依存している。しかしながら、上記のような状況での効用測定は論理的な難点を有している。すなわち、推定されたと考えられている効用関数には効用を測る一意的な原点が存在しない。

一方、初期条件が確実的であるとき、または、意思決定者が一定リスク回避

であるとき、この困難は生じない。したがって、そのときには効用は測定可能であるかもしれない（第４章４－２節、第６章３－３節、参照)。

7. 小世界の問題

ある小世界が決定されていると仮定しよう。そのとき意思決定者の選好行動がこの小世界の要因だけによって決定されているという保証はない。期待効用のモデルとしての小世界と現実の選好行動には必然的な不調和がある。小世界において確実な結果であるとされたものが大世界の視点においては確実でない（第７章２節、参照)。

健康な人が昼食になにを食べるべきかということは、人生を如何に生きるべきかを決定する問題に比較して、重要な意思決定問題ではない。この昼食の問題の小世界においては、多分、初期条件は確実的であろう。さらに、この程度の重要性の問題では小世界は人世を如何に生きるべきかという大世界の視点から言っても確実な結果の存在を許すだろう。すなわち、重要性の低い意思決定問題においては小世界を実質的に大世界から孤立させることは可能である。

一方、企業の命運をかけるような投資問題においてどの選択対象を選ぶべきかということは、昼食の選択問題に比較して、より重要な問題であろう。この問題に対する小世界では初期条件を確実的であるとみなすことは不適切である。なぜならば、多重くじの相互依存性が選好順位に影響するかもしれないからである。意思決定問題は、重要になればなるほど、より大きい世界で考察されなければならない。そして、重要性の高い意思決定問題では、大世界の視点から眺めるとき、小世界における結果は常に確実的でないと考えられる。すなわち、重要な意思決定問題では小世界を大世界から孤立させることは容易でない（第７章３－３節、参照)。

我々は、いま、小世界と大世界の関係を結果の確実性に関して議論してきたが、小世界の問題は効用の測定にも関連して議論されうる。ある小世界で効用

の測定が計画されているとき、意思決定者がその小世界より大きい世界の視点から選好行動をとっているならば、そのとき測定されたと考えられている効用は意思決定者の行動の予測にも、行動の指針としても有効でない。

効用測定のより具体的な例にそくして言えば、文脈効果（context effect）も小世界と大世界の関係から発生しているようにみえる。文脈効果では、期待効用の定式化において全く同じ 2 つの選好問題が、表現の相違によって、選好の逆転現象を生みだす（第 6 章 3 — 3 節、参照）。

この場合、一つの表現、すなわち、一つの小世界 S_1 の視点からなされた選好が別の表現、すなわち、別の小世界 S_2 の視点からなされた選好と同じでない。小世界 S_2 は小世界 S_1 を含むより大きい世界 G_1 に含まれている。小世界 S_1 における選好が期待効用の概念の中では大きい世界 G_1 の一部である小世界 S_2 によって影響されている。このように、文脈効果が生じているときには小世界は大世界から孤立していないと言えるだろう。

8. 応　　用　　性

さて、Borch（1968, 訳書　p.93）が言うように、“意思決定者の富と独立な決定規則を求めなくてはならない理由が、とくにあるわけではない。”と考えられるならば、病的なケースでなくとも、効用の測定が不可能になる状況が存在すると言っても過言ではないだろう。その状況では、前述のように、初期条件が確実的でなく、効用関数は一定リスク回避的でない。そのとき、効用測定のための一意的な原点が存在しない。あるいは、確実等価額の概念がはなはだ困った役割を果している。

さらに、重要な意思決定問題では初期条件は不確実またはリスク的であるという主張が認められるならば、そのとき逓減リスク回避的な効用関数を使用できる正当な理由は存在しない。そして、そのような場合、Borch の見解に反することではあるが、効用の測定を可能にさせる意思決定者の選好行動は一定リ

スク回避に限定されなければならない。

粗く言えば、逓減リスク回避的な意思決定者は、金持になればなるほど、任意の“くじ”の効用をますます高める。日常、一般的に許容されていると考えられるこの逓減リスク回避の仮定が認められないならば、期待効用理論の応用はかなり特殊な範囲に制約されざるをえない（第10章３節、参照）。

9. 期待効用理論の制約条件

本書における議論から、期待効用理論が規範的に受け入れられるためには、少なくともつぎの条件を満たすことが要求される：

(1) 意思決定者は期待効用の公理系の“もっともらしさ”を信じること。

(2) 意思決定者の選好行動が混合集合の演算（あるいは、これに対応する確率演算）に従っていること。

(3) 初期条件が確実的であること。

(4) 前項(3)が満たされていないとき、初期条件が選択対象とは確率的に独立であり、意思決定者が一定リスク回避的であること。

(5) 前項(3)、(4)にも関連するが、小世界が大世界から適切に孤立させられていること。

我々はリスク的初期条件の視点から期待効用理論に関するいくつかの難点を指摘してきた。それに対して、ある人々は期待効用モデルに代るモデルが存在するのかと我々に迫るかもしれない。現在、我々はそれに代るモデルを持ちあわせていない。そのとき、代替的モデルが提示されないかぎり、期待効用の概念をすてることはできないと主張されるかもしれない（Amihud, 1979, p.149）。

もしそのように主張するならば、それも良し、しかしながら我々が指摘した期待効用モデルにおける難点は受け入れられるべきである。そして、これらの難点に充分な配慮がなされた後に、期待効用は意思決定の分析に使用されるべきである。

付録１　効用関数の導出（定理3.1の証明）

期待効用定理の証明

この付録１においては、第３章２節における期待効用定理を証明しよう。したがって、“くじ”の集合Ωのもとで効用関数の導出が議論される。しかしながら、線型効用関数の導出プロセスでは、公理系は別として、集合Ωが混合集合であるという条件だけが使われているので、混合集合の条件を満たす集合、例えば単純確率分布の集合、確率ベクトルの集合などにおける線型効用関数の存在も証明されていることになる。

準備としてつぎの２つの補題を証明しよう。

補題１：もし l_1、$l_2 \in \Omega$ に対して $l_1 \succ l_2$ ならば全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$l_1 \succ \alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2 \succ l_2$$

(証明)　$\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2 \succ l_1 \succ l_2$

と仮定しよう。そのとき、公理２より

$$l_1 \sim \beta^* \cdot (\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2) \dot{+} (1-\beta^*) \cdot l_2$$

（混合集合の条件Ｍ３を適用するとき）

$$= \beta^* \alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\beta^* \alpha) \cdot l_2 \qquad (\mathrm{A}\,1.\ 1)$$

なる $\beta^* \in (0,\ 1)$ が存在する。

式（Ａ１．１）を代入するとき、公理３と（混合集合の）条件Ｍ３により

$$\alpha \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2 \sim \alpha \cdot (\alpha\beta^* \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha\beta^*) \cdot l_2) \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_2$$

$$= \alpha^2 \beta^* \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha^2 \beta^*) \cdot l_2$$

同様に、$\alpha^2 \beta^* \cdot l_1 \dot{+} (1-\alpha^2 \beta^*) \cdot l_2 \succ l_1 \succ l_2$ であるから、

公理２により

$$l_1 \sim \lambda^* \,(\alpha^2 \beta^* \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha^2\beta^*) \cdot l_2) \dotplus (1-\lambda^*) \cdot l_2$$
$$= \lambda^* \beta^* \alpha^2 \cdot l_1 \dotplus (1-\lambda^* \beta^* \alpha^2) \cdot l_2 \qquad \text{（A 1．2）}$$

なる$\lambda^* \in (0,\ 1)$が存在する。

式（A 1．1）と式（A 1．2）を満たす2つの$\lambda^* \beta^* \alpha^2$と$\alpha\beta^*$（$\lambda^* \beta^* \alpha^2 < \alpha\beta^*$）が存在することは公理2における$\alpha^*$の一意性と矛盾する。したがって、

$$l_1 \succ \alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_2$$

となる。

同様に、

$$\alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_2 \succ l_2$$

となる。**（証終）**

補題2： もしl_1、$l_2 \in \Omega$に対して$l_1 \succ l_2$ならば、α、$\beta \in (0,\ 1)$に対して$\alpha > \beta$なるための必要充分条件は

$$\alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_2 \succ \beta \cdot l_1 \dotplus (1-\beta) \cdot l_2$$

である。

（証明） 補題1より

$$\alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_2 \succ l_2$$

となる。そこで、$\alpha > \beta$としよう。$0 < \beta/\alpha < 1$であるゆえに、補題1より

$$\alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_2 \succ \frac{\beta}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_2) \dotplus$$
$$(1-\frac{\beta}{\alpha}) \cdot l_2 = \beta \cdot l_1 \dotplus (1-\beta) \cdot l_2$$

となる。

一方、$l_1 \succ l_2$かつ

$$\alpha \cdot l_1 \dotplus (1-\alpha) \cdot l_2 \succ \beta \cdot l_1 \dotplus (1-\beta) \cdot l_2$$

であるならば、同様に、$\alpha > \beta$となる。**（証終）**

（定理の証明） 固定されたl_a、$l_b \in \Omega$、（$l_a \succ l_b$）に対して集合I $=\{\, l \mid l_a \succ l \succ l_b \,\}$を考えよう。

公理2より、$l_a \succ l \succ l_b$なるlに対して、

$$l \sim \alpha^* \cdot l_a \dot{+} (1-\alpha^*) \cdot l_b$$

なる$\alpha^* \in (0, 1)$が存在する。そして、l_aとl_bが固定されているゆえに、α^*は“くじ”lに依存する。したがって、α^*はlとある関数関係にある。

すなわち、

$$\alpha^* = h(l) \tag{A1. 3}$$

である。

そのとき、$l_a \succ l_1 \succ l_b$、$l_a \succ l_2 \succ l_b$なる“くじ”l_1、l_2に対してh(l_1)とh(l_2)が定まる。そして、補題2よりh$(l_1)>$h(l_2)なるための必要充分条件は$l_1 \succ l_2$となる。形式的に書くと、

$$l_1 \sim h(l_1) \cdot l_a \dot{+} (1-h(l_1)) \cdot l_b \succ h(l_2) \cdot l_a$$
$$\dot{+} (1-h(l_2)) \cdot l_b \sim l_2$$

となる。

ただし、もし任意のl_a、$l_b \in \Omega$において$l_a \sim l_b$ならば、公理3により、

$$\alpha \cdot l_a \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_b \sim \alpha \cdot l_a \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_a$$

となる。そして、条件M3において$\beta=0$とすると、

$$\alpha(0 \cdot l_b \dot{+} 1 \cdot l_a) \dot{+} (1-\alpha) \cdot l_a = 0 \cdot l_b \dot{+} 1 \cdot l_a$$

となる。そして条件M4より

$$0 \cdot l_b \dot{+} 1 \cdot l_a = l_a$$

となり、全てのlに対して$l \sim l_a \sim l_b$となる。それゆえに、全てのlに対して一つのある数値、例えば1、がh$(l)=1$として定められるので、今後、$l_a \succ l_b$と仮定しておこう。

さて、“くじ”lは

$$l = p'_1 \cdot l_1 \dot{+} p'_2 \cdot l_2$$
$$\sum_{i=1}^{2} p'_i = 1, \qquad p'_i \geqq 0, \qquad i = 1、2$$

としよう。ただし

$$l_a \succ l_i \succ l_b, \quad i = 1、2$$

とする。また補題1より

$$l_a \succ l \succ l_b$$

となる。

そのとき、関数hの定義式（A 1．3）から

$$l \sim h(l) \cdot l_a \dot{+} (1 - h(l)) \cdot l_b$$

となる。しかしながら、

$$l_i \sim h(l_i) \cdot l_a \dot{+} (1 - h(l_i)) \cdot l_b$$

であるゆえに、公理3によって

$$l \sim p'_1 \cdot [h(l_1) \cdot l_a \dot{+} (1 - h(l_1)) \cdot l_b]$$
$$\dot{+} p'_2 \cdot [h(l_2) \cdot l_a \dot{+} (1 - h(l_2)) \cdot l_b]$$

（M 6すなわち式（2．3）を適用するとき）

$$= [\sum_{i=1}^{2} p'_i h(l_i)] \cdot l_a \dot{+} [1 - \sum_{i=1}^{2} p'_i h(l_i)] \cdot l_b$$

となる。したがって、公理2におけるα^*の一意性から、すなわち、hの一意性から、

$$h(l) = \sum_{i=1}^{2} p'_i h(l_i) \qquad (A\,1.\ 4)$$

が得られる。このようにIにおける線型関数hが得られる。

さて、固定されたl_c、l_d、（$l_c \succ l_d$）と集合$I = \{ l \mid l_a \succ l \succ l_b \}$、（$l_c$、$l_d \in I$）を考えよう。そのとき、式（A 1．4）から容易に理解されるように、集合I上での線型効用関数gが存在し、任意の定数$\delta > 0$、γに対して集合Iの要素lの関数g'、すなわち、

$$g'(l) = \delta g(l) + \gamma$$

も、また、集合I上での線型効用関数となる。

とくに、$g(l_c) > g(l_d)$であるゆえに、

$$\delta g(l_c) + \gamma = 1$$
$$\delta g(l_d) + \gamma = 0$$

なるような$\delta > 0$、γを選ぶことが可能である。さらに、集合Ｉ上での線型効用関数を

$$u(l \mid I, g) = \delta g(l) + \gamma, \qquad l \in I$$

によって定義しよう。そのとき、任意の２つの集合I_1、I_2（l_c、$l_d \in I_1$、l_c、$l_d \in I_2$）、I_1上で線型効用関数g_1、I_2上での線型効用関数g_2に対して

$$u(l \mid I_1, g_1) = u(l \mid I_2, g_2), \quad l \in I_1 \cap I_2$$

が成立する。その理由は以下の通りである。

もし$l \sim l_c$あるいは$l \sim l_d$ならば結果は明白である。(i) $l \succ l_c$、(ii) $l_c \succ l \succ l_d$, (iii) $l_d \succ l$ の３つの場合には、公理２より

(i)　$l_c \sim (1-\lambda_1) \cdot l_d \dot{+} \lambda_1 \cdot l$

(ii)　$l \sim \lambda_2 \cdot l_c \dot{+} (1-\lambda_2) \cdot l_d$

(iii)　$l_d \sim (1-\lambda_3) \cdot l \dot{+} \lambda_3 \cdot l_c$

なるようなλ_1、λ_2、$\lambda_3 \in (0, 1)$が存在する。そして、これら３つの場合には線型効用関数$u(\cdot \mid I_i, g_i)$の性質から、$i = 1$、２、

(i)　$1 = \lambda_1 u(l \mid I_i, g_i)$

(ii)　$u(l \mid I_i, g_i) = \lambda_2$

(iii)　$0 = (1-\lambda_3) u(l \mid I_i, g_i) + \lambda_3$

が得られる。したがって、$l \in I_1 \cap I_2$に対して$u(l \mid I_1, g_1) = u(l \mid I_2, g_2)$となる。

任意の$l \in \Omega$に対してl、l_c、l_dを含む集合Ｉが存在する。これらのl、l_c、l_dを含む全ての集合ＩとＩ上での全ての線型効用関数ｇに対する$u(l \mid I, g)$の共通の値を$u(l)$と定義しよう。そのとき、$u(l)$は全ての$l \in I$に対して定義され、ｕはそのような集合Ｉの全てに対する線型効用関数となる。したがって、集合Ω上での線型効用関数ｕが存在する。

ここで、l_{x_i}は確実な結果x_iが確率１で得られる“くじ”としよう。そし

て、第２章５節「効用関数」で議論したように、

$$h(l_{x_i}) = h(x_i)$$

と定義しよう。さらに、任意の“くじ” l は確実な結果の集合で定義された“くじ”に還元されるので、

$$l = p_1 \cdot l_{x_1} \dotplus p_2 \cdot l_{x_2} \dotplus \cdots \dotplus p_r \cdot l_{x_r}$$

と表現することが可能である。

そのとき、式（Ａ１．４）より

$$h(l) = \sum_{i=1}^{r} p_i h(l_{x_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{r} p_i h(x_i), \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1, \quad p_i \geqq 0, \quad i = 1, \cdots, r$$

となる。したがって

$$h(l) = E(h, l)$$

となり、期待効用が導出される。

正の線型変換までの一意性

もし、関数ｕが式（３．１）を満たし、関数 v が式（３．４）を満たすならば、

$$E(v, l) = \delta E(u, l) + \gamma$$

なる関係を考慮するとき、明らかに、関数 v も式（３．１）を満たす。（証終）

付録2　定理3.2の証明

つぎに示す証明の(1)はKihlstrom-Mirman（1974）によるものであり、(2)と(3)はPratt（1964）によるものである。

(証明)

(1)　条件1 $\Longleftrightarrow$ 条件3。効用関数u_1とu_2の仮定によって$u_1 = G(u_2)$となるような単調増加で、2回連続微分可能な関数$G = u_1(u_2^{-1})$が存在する。微分することによって

$$u_1' = G' u_2' \qquad (A2.\ 1)$$

$$u_1'' = G''(u_2')^2 + G' u_2'' \qquad (A2.\ 2)$$

が得られる。式（A2.　1）と（A2.　2）から

$$G'' = \frac{u_1'' - G' u_2''}{(u_2')^2}$$

$$= \left(\frac{u_1''}{u_1'} - \frac{u_2''}{u_2'} \right) \left(\frac{u_1'}{(u_2')^2} \right)$$

となる。それゆえに、$G'' \leq (<)\ 0$ なるための必要充分条件は$r_1 \geq (>)\ r_2$となる。

(2)　条件3 $\Longrightarrow$ 条件2。

$$u(l) = E(u,\ l) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\, p_i$$
$$= E\{u(x)\}$$

とし、

$$x^*(\omega、l) = u^{-1} E\{u(\omega + x)\}$$

と表現することにしよう。そのとき

$$\pi_i(\omega、l) = \omega + E(l) - u_i^{-1} E\{u_i(\omega + x)\}、\qquad i = 1、2$$

となる。したがって

$$\pi_1(\omega、l) - \pi_2(\omega、l)$$
$$= u_2^{-1} E\{u_2(\omega + x)\} - u_1^{-1} E\{u_1(\omega + x)\}$$

$$= u_2^{-1} E\{t\} - u_1^{-1} E\{u_1(u_2^{-1}(t))\} \qquad (A2.\ 3)$$

となる。ただし $t = u_2(\omega + x)$ である。

もし $G = u_1(u_2^{-1})$ が $G'' \leqq (<) 0$ であるならば、Jensenの不等式と“くじ”が退化していないことから

$$E\{u_1(u_2^{-1}(t))\} \leqq (<) u_1(u_2^{-1}(E\{t\}))$$

となる。そのとき式（A 2．3）より

$$\begin{aligned} &\pi_1(\omega, l) - \pi_2(\omega, l) \\ &\quad = u_2^{-1} E\{t\} - u_1^{-1} E\{u_1(u_2^{-1}(t))\} \\ &\quad \geqq (>) u_2^{-1} E\{t\} - u_1^{-1} u_1(u_2^{-1} E\{t\}) \\ &\quad = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって $G'' \leqq (<) 0$ であるならば、

$$\pi_1(\omega, l) \geqq (>) \pi_2(\omega, l)$$

となる。

(3) 条件2 $\Longrightarrow$ 条件1。上記の証明(1)と(2)によって条件1 $\Longrightarrow$ 条件2、すなわち、$r_1(\omega) \geqq (>) r_2(\omega) \Longrightarrow \pi_1(\omega, l) \geqq (>) \pi_2(\omega, l)$ が証明されている。そこで条件1 $\Longrightarrow$ 条件2の対偶命題を考えることによって条件2 $\Longrightarrow$ 条件1を証明しよう。

さて、$r_1(\omega) \geqq (>) r_2(\omega)$ の否定は $r_2(\omega) > (\geqq) r_1(\omega)$ であり、$\pi_1(\omega, l) \geqq (>) \pi_2(\omega, l)$ の否定は $\pi_2(\omega, l) > (\geqq) \pi_1(\omega, l)$ であることに注意するならば、条件1 $\Longrightarrow$ 条件2は

$$\pi_2(\omega, l) > (\geqq) \pi_1(\omega, l) \Longrightarrow r_2(\omega) > (\geqq) r_1(\omega)$$

と同値である。ここで引数1と2を交換するならば、

$$\pi_1(\omega, l) \geqq (>) \pi_2(\omega, l) \Longrightarrow r_1(\omega) \geqq (>) r_2(\omega)$$

となり、条件2 $\Longrightarrow$ 条件1が証明された。（証終）

付録3　定理4.2の証明

つぎに示す証明はFukuba-Ito（1980）によるものである。

(証明)

仮定、$\phi(l_1)=\phi(l_2)$ から、

$$u^{-1}\{p_1u(x)+p_2u(x+k)\}=u^{-1}\{p_1u(y)+p_2u(y+h)\}$$

$$p_1u(x)+p_2u(x+k)=p_1u(y)+p_2u(y+k)$$

$$p_2\{u(y+h)-u(x+k)\}=p_1\{u(x)-u(y)\}$$

となる。もし $x>y$ ならば、$u(x)$の単調増加性から $u(x)-u(y)>0$ である。したがって、$u(y+h)-u(x+k)>0$ となり、また、$u(x)$の単調増加性から $y+h>x+k$ となる。ゆえに、

$$y+h>x+k>x>y$$

となる。

一方、もし $y>x$ ならば、同様に、

$$x+k>y+h>y>x$$

となる。

仮定、$\pi(l_2)>\pi(l_1)$ から、

$$\pi(l_2)-\pi(l_1)=\{y+p_2h-\phi(l_2)\}-\{x+p_2k-\phi(l_1)\}$$

$$=p_2\{(y+h)-(x+k)\}+p_1(y-x)>0$$

となる。したがって、$x+k>y+h>y>x$ では、$\pi(l_2)>\pi(l_1)$ は成立しない。それゆえに、仮定、$\phi(l_2)=\phi(l_1)$, $\pi(l_2)>\pi(l_1)$のもとでは

$$y+h>x+k>x>y$$

となる。明らかに $h>k$。

さて、p_1、p_2、x が固定されるとき

$$\phi(k) = \phi(l_1) = \phi(x) = u^{-1}[p_1 u(x) + p_2 u(x+k)]$$

なるkの関数ϕ(k)を定義しよう。そのとき、同様に、

$$\pi(k) = \pi(l_1) = x + p_2 k - \phi(k)$$

が定義される。そこで、

$$u(\phi(k)) = p_1 u(x) + p_2 u(x+k)$$

をkに関して微分することによって

$$\phi'(k) = p_2 u'(x+k)/u'(\phi(k)) \tag{A3. 1}$$

が得られる。同様に、

$$\pi'(k) = p_2 - \phi'(k)$$

となる。さらに、$u'(x) > 0$であるから

$$\phi'(k) > 0$$

となり、$u''(x) < 0$から$u'(\phi(k)) > u'(x+k)$となり、

$$\pi'(k) = p_2\left(1 - \frac{u'(x+k)}{u'(\phi(k))}\right) > 0$$

となる。

$$\psi(y) = u^{-1}[p_1 u(y) + p_2 u(y+h)],$$

$$\phi(y) = u^{-1}[p_1 u(y) + p_2 u(y+k)]$$

であることを考慮するとき、

$$\pi(l_2) > y + p_2 k - \phi(y)$$

となり、これから

$$p_2(h-k) > \psi(y) - \phi(y) > 0$$

が生じる。

さらに、

$$\phi'(x) = \frac{p_1 u'(x) + p_2 u'(x+k)}{u'(\phi(x))}$$

において、$\phi'(x)$をkの関数f(k)とし、$v(x) = u'(x)$とおこなう。すなわち、

$$f(k)=\frac{p_1 v(x)+p_2 v(x+k)}{v(\phi(k))} \qquad (A3.\ 2)$$

としよう。ただし、f(k)は式（A３．１）の $\phi'(k)$とは異なることに注意されたい。

そのとき、式（A３．２）をｋに関して微分することによって、

$$\{v(\phi(k)\}^2 f'(k)=p_2 v'(x+k)\ v(\phi(k))$$
$$-\{p_1 v(x)+p_2 v(x+k)\}\ v'(\phi(k))\ \phi'(k) \qquad (A3.\ 3)$$

が得られる。式（A３．３）における第一項、第二項はともに負であることに注意されたい。

ここで、

$$v'(x+k)=\frac{du'(x+k)}{dk}=\frac{du'(x+k)}{dx}$$

であることに注目し、式（４．８）、$p_1 u'(x)+p_2 u'(x+k)>u'(\phi(x))$ を使うことによって

$$\{v[\phi(k)]\}^2 f'(k)>v(\phi(k))\{p_2 v'(x+k)$$
$$-v'(\phi(k))\ \phi'(k)\} \qquad (A3.\ 4)$$

が生じる。

$\pi_s'(x)>0$、すなわち、$r'(x)=(-u''(x)/u'(x))'<0$から、

$$\frac{u''(x+k)}{u'(x+k)}>\frac{u''(\phi(k))}{u'(\phi(k))}$$

となる。すなわち

$$u''(x+k)-\{u''(\phi(k))\ u'(x+k)/u'(\phi(k))\}>0$$

が得られる。それゆえに、式（A３．１）を使うことによって

$$p_2 v'(x+k)-v'(\phi(k))\ \phi'(k)$$
$$=p_2 u''(x+k)-u''(\phi(k))\ \frac{p_2 u'(x+k)}{u'(\phi(k))}$$
$$=p_2\left\{u''(x+k)-u''(\phi(k))\ \frac{u'(x+k)}{u'(\phi(k))}\right\}>0 \qquad (A3.5)$$

となる。

したがって、$v(\phi(k)) = u'(\phi(k)) > 0$、式（A３．４)、式（A３．５）から

$$f'(k) > 0 \tag{A3.6}$$

が得られる。式（A３．６）から、

$$\psi'(y) > \phi'(y)$$

となり、式（４．21）と$x > y$から、

$$\phi'(y) > \phi'(x)$$

が生じる。結果として、

$$\psi'(y) > \phi'(x) \tag{A3.7}$$

が得られる。

式（４．22）と式（A３．７）から、全ての$\omega > 0$に対して

$$\phi(L_2) = \psi(y + \omega) > \phi(x + \omega) = \phi(L_1)$$

が得られる。**（証終）**

付録4　諸公理系の同値性

1. は じ め に

第8章で挙げられた諸公理系には、一見、同値であるようにみえないものが含まれている。しかしながら、構造が限定されるとき、すなわち、混合集合に限定されるとき、実は、公理系ＬＲを除く諸公理系は同値である。付録4ではこれを示そう（伊藤駒之、1984）。

公理系ＬＲには“くじ”に対する連結性が含まれていない。したがって、混合集合の上で公理系ＬＲを記述することは不可能である。しかし、混合集合の上で定義されたその他の公理系は公理系ＬＲを意味している。一方、公理系ＬＲは期待効用算定の結果として“くじ”に対する連結性を意味している。それゆえに、第8章における諸公理系が同値であることは事実である。他の公理系に較べて公理系ＬＲは冗長であるが、この公理系には独得の意図が込められている。この点に関しては第9章3－1節「弱順序の公理の類」を参照されたい。

我々の議論はHerstein-Milnorの公理系を出発点とするので、便宜上、もう一度、混合集合の定義と公理系ＨＭを提示しておこう。

定義2.2. 混合集合（mixture set）は演算$\dot{+}$、・のもとでつぎの4つの条件を満たす集合Ｓである（Herstein-Milnor, 1953）；

条件M 1. 全てのａ、ｂ∈Ｓと全ての$\alpha \in [0,\ 1]$に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \in S$$

条件M 2.

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b = (1-\alpha) \cdot b \dot{+} \alpha \cdot a$$

条件M 3. 全てのａ，ｂ∈Ｓと全ての$\alpha,\ \beta \in [0,\ 1]$に対して

$$\alpha \cdot (\beta \cdot a \dot{+} (1-\beta) \cdot b) \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

$$=(\alpha\beta)\cdot a\,\dot{+}\,(1-\alpha\beta)\cdot b$$

条件M 4. $\alpha=0$ ならば、そのとき

$$\alpha\cdot a\,\dot{+}\,(1-\alpha)\cdot b=b$$

演算 $\dot{+}$、・が、それぞれ、ベクトルの加算、スカラーとの積を意味するとき、ベクトル空間は混合集合の条件を全て満たしている。

公理系HM（Herstein-Milnor, 1953）

公理HM 1（弱順序）：集合Sの要素に関する選好関係 $\succsim$ は弱順序である。すなわち、(1)連結性と(2)推移性が成立する。

公理HM 2（代替性）：もしa、a'∈Sに対してa～a' ならば、そのとき全てのb∈Sに対して

$$\frac{1}{2}\cdot a\,\dot{+}\,\frac{1}{2}\cdot b \;\sim\; \frac{1}{2}\cdot a'\,\dot{+}\,\frac{1}{2}\cdot b$$

が成立する。

公理HM 3（連続性）：全てのa、b、c∈Sに対して集合Aと集合B、すなわち、

$$A=\{\,\alpha\mid \alpha\cdot a\,\dot{+}\,(1-\alpha)\cdot b\succsim c\,\}$$

と

$$B=\{\,\alpha\mid c\succsim \alpha\cdot a\,\dot{+}\,(1-\alpha)\cdot b\,\}$$

は閉集合である。

公理系Aから公理系Bが導かれることを、公理系A⟹公理系B、と記すことにしよう。そのとき、この付録における同値性の証明手順は公理系HM⟹公理系BG ⟹ 公理系F ⟹公理系VM ⟹ 公理系M ⟹公理系HMを示すことになる。もしこれが示されるならば、そのときこれらのどれから出発しても、その他の公理系が導かれる。

なお、公理系間の同値性に関する議論は、部分的には、Jensen（1967）と

Fishburn(1982) によってなされている。結果だけを簡単に要約することにしよう。まず、Jensen の議論はつぎの公理系から始まる。

Jensen の公理系（Jensen, 1967）

公理J1（弱順序）。

公理J2（独立性、第8章5節の式（8．17)、参照）：もし a，b ∈ S に対して $a \succ b$ ならば、全ての c ∈ S と全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succ \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

が成立する。

公理J3（アルキメディアン）。

この公理系から、Jensen (1967) は単調性の公理、絶対確実の原則、代替性の公理（第8章3節の公理M2）、連続性の公理（第8章3節の公理M3）を導きだしている。一方、Fishburn (1982) によって、この Jensen の公理系と Herstein-Milnor の公理系の同値性が証明されている。

2. 同　値　性

2－1　公理系HMと公理系BG

さて、Blackwell-Girshick (1954)の公理系BGにおける独立性の公理は可付番無限個の要素に関連するものであるが、それを2個の要素に限定するとき公理系BGはつぎのように表現される。

公理系BG

公理BG1（弱順序）：集合Sの要素に関する選好関係 $\succsim$ は弱順序である。すなわち、(1)連結性と(2)推移性が成立する。

公理BG2（独立性）：もし a_1、a_2、b_1、$b_2 \in S$、$\alpha \in [0,\ 1]$ 対して

$a_1 \succsim b_1$、$a_2 \succsim b_2$ が成立するならば、そのとき

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succsim \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

が成立する。

さらに、$a_1 \succ b_1$、$a_2 \succsim b_2$ ならば全ての $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succ \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

が成立する。

公理ＢＧ３（アルキメディアン）：もし a、b、$c \in S$ に対して $a \succ b \succ c$ であるならば、そのとき

$$b \succ \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

$$\beta \cdot a \dot{+} (1-\beta) \cdot c \succ b$$

なる α、$\beta \in (0, 1)$ が存在する。

本節の目的はつぎの定理１を証明することである。

定理 1. 公理系ＨＭから公理系ＢＧは導出される。

定理１の証明の準備として公理系ＨＭから導きだされた Herstein-Milnor の諸結果を定理として提示しておこう。

定理 2. 公理ＨＭ１、ＨＭ３が成立しているとしよう。もし a、b、$c \in S$、かつ、$a \succsim b \succsim c$ であるならば、そのとき

$$b \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

なる $\alpha \in [0, 1]$ が存在する。

さらに、$a \succ b \succ c$ であるならば、$\alpha \in (0, 1)$ である。

(証明) Herstein-Milnor（1953）の定理１の証明を参照せよ。**(証終)**

定理 3. 公理ＨＭ１、ＨＭ２、ＨＭ３が成立しているとしよう。もし a、$b \in S$、かつ、$a \succ b$ であるならば、そのとき

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ \lambda \cdot a \dot{+} (1-\lambda) \cdot b$$

なるための必要充分条件は $\alpha > \lambda$ であることである。

(証明) Herstein-Milnor（1953）の定理4の証明を参照せよ。 **(証終)**

定理 4. 公理ＨＭ１、ＨＭ２、ＨＭ３が成立しているとしよう。もしａ、ａ'∈Ｓ、かつ、ａ～ａ'であるならば、そのとき全ての$\alpha \in [0, 1]$と全てのｂ∈Ｓに対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \sim \alpha \cdot a' \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

が成立する。

(証明) Herstein-Milnor（1953）の定理2の証明を参照せよ。 **(証終)**

定理 5. 公理ＨＭ２、ＨＭ３が成立しているとしよう　もしａ、ａ'∈Ｓ、かつ、ａ～ａ'であるならば、そのとき全ての$\alpha \in [0, 1]$に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot a' \sim a$$

が成立する。

(証明) Herstein-Milnor（1953）の備考（remark(d)）を参照せよ。**(証終)**

さて、公理系ＨＭから公理ＢＧ３を導出する仕事に移ろう。

定理 6. 公理系ＨＭから公理ＢＧ３は導出される。

(証明) いま、ａ、ｂ、ｃ∈Ｓ、かつ、$a \succ b \succ c$であるとしよう。そのとき、定理２の後半部分によって

$$b \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \qquad (\text{A}4.\ 1)$$

なる$\alpha \in (0, 1)$が存在する。そして定理３によって$\lambda > \alpha$では

$$\lambda \cdot a \dot{+} (1-\lambda) \cdot c \succ \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \qquad (\text{A}4.\ 2)$$

となる。そのようなλはαが開区間（０，１）の点であるから常に存在する。それゆえに、式（Ａ４．１）と式（Ａ４．２）から推移性によって

$$\lambda \cdot a \dot{+} (1-\lambda) \cdot c \succ b$$

となる。また、同様に、

$$b \succ \mu \cdot a \dot{+} (1-\mu) \cdot$$

なる$\mu \in (0, 1)$も存在する。**(証終)**

定理８を導出する準備としてつぎの定理７を証明しよう。

定理 7. 公理系HMが成立しているとしよう。もし a、b $\in$ S、a $\succsim$ b、$\alpha \in [0, 1]$ であるならば、そのとき全ての c $\in$ S に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succsim \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

が成立する。

(証明) いま、a $\succsim$ b、かつ、$\alpha \in [0, 1]$ としよう。そして、まず c $\succsim$ a $\succsim$ b と仮定しよう。そのとき定理2の前半部分によって

$$a \sim \lambda \cdot c \dot{+} (1-\lambda) \cdot b$$

となる $\lambda \in [0, 1]$ が存在する。したがって定理4と条件M3によって

$$\begin{aligned}\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c &\sim \alpha \cdot (\lambda \cdot c \dot{+} (1-\lambda) \cdot b) \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \\ &= (1-\alpha(1-\lambda)) \cdot c \dot{+} \alpha(1-\lambda) \cdot b\end{aligned}$$

となる。そのとき、$1-\alpha(1-\lambda) \geq 1-\alpha$ であるから、定理3と定理5によって c $\succsim$ b に対して

$$(1-\alpha(1-\lambda)) \cdot c \dot{+} \alpha(1-\lambda) \cdot b \succsim (1-\alpha) \cdot c \dot{+} \alpha \cdot b$$

となる。したがって、推移性により

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succsim \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

が成立する。

また、a $\succsim$ c $\succsim$ b の場合、a $\succsim$ b $\succsim$ c の場合も同様に証明される。 **(証終)**

定理 8. 公理系HMが成立しているとしよう。そのとき、a_1、a_2、b_1、b_2 $\in$ S、$a_1 \succsim b_1$、$a_2 \succsim b_2$、かつ、$\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succsim \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

が成立する。

(証明) 定理7より

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succsim \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2$$

となる。さらに定理7より

$$\alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succsim \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

が成立する。したがって推移性によって

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succsim \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

が成立する。**(証終)**

定理10を証明するために定理9を提示しておこう。

定理9. 公理系HMが成立しているとしよう。もし a、$b \in S$、$a \succ b$、かつ、$\alpha \in (0,\ 1)$ であるならば、全ての $c \in S$ に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succ \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

が成立する。

(証明) 定理7と同様に証明される。またFishburn（1982, p.17）におけるH4を参照されたい。**(証終)**

定理10. 公理系HMが成立しているとしよう。そのとき a_1、a_2、b_1、$b_2 \in S$、$a_1 \succ b_1$、$a_2 \succsim b_2$、かつ、$\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succ \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

が成立する。

(証明) 定理9より

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succ \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2$$

となる。そして定理7より

$$\alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succsim \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

となる。したがって、推移性より

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot a_2 \succ \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot b_2$$

が成立する。**(証終)**

以上の議論から定理1の証明は自動的に生じる。

(定理1の証明)

(1) 弱順序性に関しては公理HM1、公理BG1はともに同じである。

(2) 公理BG2の前半部分は定理8によって、後半部分は定理10によって導出される。

(3) 公理BG3は定理6によって導出された。**(証終)**

2－2　公理系ＢＧと公理系Ｆ

さて、Ferguson (1967) の公理系Ｆは混合集合の演算のもとでつぎのように表現される。

公理系Ｆ

公理Ｆ１（弱順序）

公理Ｆ２（独立性）：全てのａ、ｂ、ｃ∈Ｓと全ての$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succsim \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

なるための必要充分条件は$a \succsim b$である。

公理Ｆ３（アルキメディアン）

定理11. 公理系ＢＧから公理系Ｆは導出される。

（定理11の証明） 公理系ＢＧと公理系Ｆは公理ＢＧ２と公理Ｆ２において相違するだけである　したがって、公理系ＢＧから公理Ｆ２が導出されるならば、定理11の証明は完成する。**（証終）**

定理12. 公理Ｆ２は公理系ＢＧから導出される。

（証明）

(1)　公理ＢＧ２の前半部分において$a_2 = b_2 = c$とおくならば、$a_1 \succsim b_1$から

$$\alpha \cdot a_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succsim \alpha \cdot b_1 \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

となる。それゆえに公理Ｆ２の充分性が示された。

(2)　必要性を示すために、

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succsim \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

であるならばそのとき$a \succsim b$であることの対偶を示そう　その対偶は$a \succ b$であるならばそのときある$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succ \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \qquad (A4.3)$$

が成立することである。公理ＢＧ２の後半部分において$a_2 = b_2 = c$とおくならば

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succ \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

となる。したがって、公理系ＢＧ２が成立するならば、そのとき公理Ｆ２の必要性も成立する。**（証終）**

２－３　公理系Ｆと公理系ＶＭ

さて、Von Neumann-Morgenstern (1947) の公理系における構造の公理は混合集合の条件に含まれるので、Von Neumann-Morgensternの公理系はつぎの公理系ＶＭとして表現される。ただし公理ＶＭ１は弱順序としよう。

公理系ＶＭ

公理ＶＭ１（弱順序）

公理ＶＭ２（絶対確実の原則）：a、b、$c \in S$と全ての$\alpha \in (0,\ 1)$に対して、もし$a \succ b$であるならば、そのとき

$$a \succ \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

かつ

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ b$$

が成立する。

公理ＶＭ３（アルキメディアン）

定理13. 公理系Ｆから公理系ＶＭは導出される。

（定理13の証明） 公理系Ｆが公理系ＶＭを意味することを示すには、公理系Ｆから公理ＶＭ２が導出されることを示すことで充分である。**（証終）**

定理14. 公理系Ｆが成立しているとしよう。そのとき公理ＶＭ２が成立する。

（証明） 公理Ｆ２は、式（Ａ４．３）から、もし$a \succ b$であるならば、そのと

き全てのc∈Sと全ての$\alpha\in(0,\ 1)$に対して

$$\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot c\succ\alpha\cdot b\dot{+}(1-\alpha)\cdot c$$

であることを意味している。したがって

$$a\sim\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot a\succ\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b$$
$$\succ\alpha\cdot b\dot{+}(1-\alpha)\cdot b\sim b$$

となる。それゆえに

$$a\succ\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b\succ b$$

となり、公理VM2が成立する。**(証終)**

2－4　公理系VMと公理系M

さて、Marschak (1950) の公理系は、構造上の公理M4 (Postulate Ⅲ, Marschak, 1950) が無視されるとき、つぎの公理系Mとして表現される。

公理系M

公理M1 (弱順序)

公理M2 (代替性)：もしa、a'∈Sに対しa～a'であるならば、そのとき全てのb∈Sと全ての$\alpha\in(0,\ 1)$に対して

$$\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b\sim\alpha\cdot a'\dot{+}(1-\alpha)\cdot b$$

が成立する。

公理M3 (連続性)：もしa、b、c∈Sに対して$a\succ b\succ c$であるならば、そのとき

$$b\sim\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot c$$

なるような$\alpha\in(0,\ 1)$が一意的に存在する

定理15. 公理系VMから公理系Mは導出される。

公理M3の導出は実質的にはBlackwell-Girshick (1954)によってなされている。これを定理17とし、定理17の導出に必要とされる単調性に関する結果

を定理16として示しておこう。定理16と定理17は公理M２を導出するための定理18の証明で使われる。

定理16.（単調性）．　公理ＶＭ２が成立するとしよう。もしａ、ｂ$\in$Ｓに対してａ$\succ$ｂであるならば、そのとき

$$\lambda\cdot a\dot{+}(1-\lambda)\cdot b\succ\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b$$

であるための必要充分条件は$\lambda>\alpha$である。

（証明） 公理ＶＭ２より、$1>\alpha/\lambda>0$、すなわち、$\lambda>\alpha$なるα、$\lambda\in(0,1)$に対して

$$\begin{aligned}\lambda\cdot a\dot{+}(1-\lambda)\cdot b&\succ\frac{\alpha}{\lambda}\cdot(\lambda\cdot a\dot{+}(1-\lambda)\cdot b)\dot{+}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda}\right)\cdot b\\&=\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b\end{aligned}$$

（証終）

定理17. 公理ＶＭ２、ＶＭ３から公理Ｍ３は導出される。

（証明） Blackwell-Girshick（1954, p.107）における証明Ｂを参照されたい。**（証終）**

定理18. 公理系ＶＭが成立しているとしよう。もしａ、ｂ$\in$Ｓがａ$\succsim$ｂであるならば、そのとき全ての$\alpha\in(0,1)$と全てのｃ$\in$Ｓに対して

$$\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot c\succsim\alpha\cdot b\dot{+}(1-\alpha)\cdot c \qquad (A4.4)$$

が成立する。

（証明）

(1)　もしａ、ｂ$\in$Ｓに対してａ$\sim$ｂであるならば、そのとき全ての$\alpha\in(0,1)$に対して

$$\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b\sim a\sim b \qquad (A4.5)$$

が成立することを示そう。いま

$$\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b\succ a\sim b$$

と仮定しよう。そのとき公理ＶＭ２より、

$$\begin{aligned}\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b&\succ\lambda\cdot(\alpha\cdot a\dot{+}(1-\alpha)\cdot b)\dot{+}(1-\lambda)\cdot b\\&\succ a\sim b\end{aligned}$$

となる。すなわち、条件M３によって

$$\alpha\lambda \cdot a + (1-\alpha\lambda) \cdot b \succ a \sim b$$

となる。そのとき $(1-\alpha)/(1-\alpha\lambda) \in (0,\ 1)$ であるゆえに、また公理ＶＭ２と条件M３によって

$$\alpha\lambda \cdot a \dotplus (1-\alpha\lambda) \cdot b \succ (1-\alpha)/(1-\alpha\lambda) \cdot (\alpha\lambda \cdot a \dotplus (1-\alpha\lambda) \cdot b) \dotplus (1-(1-\alpha)/(1-\alpha\lambda)) \cdot a = \alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot b$$

となる。これは矛盾である。

また

$$a \sim b \succ \alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot b$$

の場合も同様に証明される。

(2)　もしa、b、$c \in S$ に対して $c \sim a \succ b$ であるならば、そのとき式（A４．５）と公理ＶＭ２より全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$\alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha)\, c \sim c \succ \alpha \cdot b \dotplus (1-\alpha) \cdot c$$

が成立する。

(3)　もし $a \succ c \succ b$ であるならば、そのとき公理ＶＭ２より全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$a \succ \alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot c \succ c \succ \alpha \cdot b \dotplus (1-\alpha) \cdot c \succ b$$

が成立する。

(4)　いま $c \succ a \succ b$ と仮定しよう。そのとき公理M３より

$$a \sim \beta_1 \cdot b \dotplus (1-\beta_1) \cdot c$$

なる β_1 が存在する。

公理ＶＭ２より

$$c \succ \beta_1 \cdot a \dotplus (1-\beta_1) \cdot c \succ a \sim \beta_1 \cdot b \dotplus (1-\beta_1) \cdot c \succ b$$

が成立する。したがって $\beta_1 \leq \alpha$ に対して定理16より

$$\alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot c \succ \alpha \cdot b \dotplus (1-\alpha) \cdot c$$

が成立する。それゆえに$\alpha<\beta_1$としよう。そのとき、もし$\beta_2\leq\alpha$であるならば、式（A4．4）が成立するように、定理16より

$$c\dot{\succ}\beta_1\cdot a\dot{+}(1-\beta_1)\cdot c\succ\beta_2\cdot b\dot{+}(1-\beta_2)\cdot c\succ\beta_1\cdot b \\ \dot{+}(1-\beta_1)\cdot c$$

なる$\beta_2\in(0,\ 1)$を選ぶことができる。他方、$\alpha<\beta_2$ならば、この過程をくり返すことにしよう。

このようにして得られる$\{\beta_n\}$は単調減少であり、$\beta_n\in(0,\ 1)$から下限β^*が存在する。しかしながら、$\beta^*>0$でないことを示そう。いま、$\beta>\beta^*>0$に対して

$$\beta\cdot a\dot{+}(1-\beta)\cdot c\succ\beta\cdot b\dot{+}(1-\beta)\cdot c \qquad (A4.\ 6)$$

であるが、β^*に対して

$$\beta^*\cdot b\dot{+}(1-\beta^*)\cdot c\succsim\beta^*\cdot a\dot{+}(1-\beta^*)\cdot c \qquad (A4.\ 7)$$

であると仮定しよう。

さて、充分に小さい正数εに対して$\beta=\beta^*+\varepsilon$とおこう。そのとき$\beta>\beta^*$であるゆえに、式（A4．6）から

$$c\succ\beta\cdot a\dot{+}(1-\beta)\cdot c\succ\beta\cdot b\dot{+}(1-\beta)\cdot c$$

が成立する。そして公理M3より

$$\beta\cdot a\dot{+}(1-\beta)\cdot c\sim\lambda\beta\cdot b\dot{+}(1-\lambda\beta)\cdot c$$

なる$\lambda\in(0,\ 1)$が存在し、定理16から

$$\lambda\beta\cdot a\dot{+}(1-\lambda\beta)\cdot c\succ\beta\cdot a\dot{+}(1-\beta)\cdot c \\ \sim\lambda\beta\cdot b\dot{+}(1-\lambda\beta)\cdot c \qquad (A4.\ 8)$$

となる。しかしながら、

$$\lambda\beta-\beta^*=\lambda(\beta^*+\varepsilon)-\beta^* \\ =-\beta^*(1-\lambda)+\lambda\varepsilon$$

であるから、充分に小さい正数εに対して$\beta^*>\lambda\beta$となる。一方、$\beta>\alpha>\lambda\beta$に対して式（A4．8）と定理16から

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succ \beta \cdot a \dot{+} (1-\beta) \cdot c$$
$$\sim \lambda\beta \cdot b \dot{+} (1-\lambda\beta) \cdot c \succ \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c$$

となり、$\alpha \geq \lambda\beta$ なる全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \succ \alpha \cdot b \dot{+} (1-\alpha) \cdot c \qquad (\mathrm{A}4.\ 9)$$

が成立する。式（A4．9）は、充分に小さい正数 ε に対して $\beta^* > \lambda\beta$ であるから、式（A4．7）と矛盾する。したがって式（A4．7）を満たすような $\beta^* \in (0,\ 1)$ は存在しない。

(5) また、$a \succ b \sim c$ の場合、$a \succ b \succ c$ の場合も同様に証明される。**(証終)**

(定理15の証明)

(1) 公理ＶＭ１と公理Ｍ１は同じである。

(2) 公理Ｍ２は定理18の結果から Jensen（1967, p.175）の定理５によって導出される。

(3) 公理Ｍ３は定理17によって導出された。**(証終)**

2－5 公理系Ｍと公理系ＨＭ

公理系ＨＭが公理系Ｍから導出されるならば、そのとき公理系ＨＭ $\Longrightarrow$ 公理系ＢＧ $\Longrightarrow$ 公理系Ｆ $\Longrightarrow$ 公理系ＶＭ $\Longrightarrow$ 公理系Ｍ $\Longrightarrow$ 公理系ＨＭと証明の過程は循環し、これらの公理系が同値であることが示される。それゆえに、つぎの定理19が証明されたとき、我々の目的は達成される。

定理19. 公理系Ｍから公理系ＨＭは導出される。

定理19の証明の主要部分は公理系Ｍから公理ＨＭ２を導出することである。そのための準備としてつぎの定理20を証明しよう。

定理20. 公理系Ｍが成立しているとしよう。もし a、$b \in S$、かつ、$a \succ b$ であるならば、そのとき全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$a \succ \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ b$$

となる。さらに、もし $a \succsim b$ であるならば、そのとき全ての $\alpha \in [0,\ 1]$ に

対して

$$a \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim b \qquad (A4.10)$$

となる,

(証明) いま

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ a \succ b$$

と仮定しよう。そのとき公理M3によって

$$a \sim \mu \cdot (\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b) \dot{+} (1-\mu) \cdot b$$
$$= \alpha\mu \cdot a \dot{+} (1-\alpha\mu) \cdot b \qquad (A4.11)$$

なる$\mu \in (0,\ 1)$が一意的に存在する。そして、公理M2によって

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \sim \alpha \cdot (\alpha\mu \cdot a \dot{+} (1-\alpha\mu) \cdot b) \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$
$$= \alpha^2\mu \cdot a \dot{+} (1-\alpha^2\mu) \cdot b \succ a \succ b$$

となる。さらに公理M3によって

$$a \sim \lambda\,[\alpha^2\mu \cdot a \dot{+} (1-\alpha^2\mu) \cdot b] \dot{+} (1-\lambda) \cdot b$$
$$= \lambda\alpha^2\mu \cdot a \dot{+} (1-\lambda\alpha^2\mu) \cdot b \qquad (A4.12)$$

となる$\lambda \in (0,\ 1)$が一意的に存在する。

式（A4.11）と式（A4.12）より

$$a \sim \alpha\mu \cdot a \dot{+} (1-\alpha\mu) \cdot b \sim \lambda\alpha^2\mu \cdot a \dot{+} (1-\lambda\alpha^2\mu) \cdot b$$

かつ、$\alpha\mu > \lambda\alpha^2\mu$となるが、これは$\mu$の一意性と矛盾する。それゆえに

$$a \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

となる。さらに

$$a \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

なる$\alpha \in (0,\ 1)$が存在すれば、公理M2をn回適用すると

$$a \sim \alpha^n \cdot a \dot{+} (1-\alpha^n) \cdot b$$

が得られ、ここで$n \to \infty$とすると$a \sim b$となる。したがって

$$a \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

となることはない。それゆえに

$$a \succ \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \qquad (A4.13)$$

が成立する。

同様に、

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ b \qquad (A4.14)$$

も成立する。

もしa～bであるならば、そのとき公理M2によって

$$a \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot a \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \qquad (A4.15)$$

が成立する。式（A4．13）、式（A4．14）、式（A4．15）を合成することによって、全ての$\alpha \in (0, 1)$に対して式（A4．10）が成立する。$\alpha=0$と$\alpha=1$に対して式（A4．15）が成立することは明らかである。**（証終）**

定理21. もしa、b∈Sかつ、a≻bならば、そのとき

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ \lambda \cdot a \dot{+} (1-\lambda) \cdot b$$

なるための必要充分条件は$\alpha > \lambda$なることである。

（証明） いま、a≻bとしよう。そのとき定理20より全ての$\alpha \in (0, 1)$に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ b$$

である。さらに、定理20より全ての$\mu \in (0, 1)$に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ \mu \cdot (\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b) \dot{+} (1-\mu) \cdot b$$
$$= \alpha\mu \cdot a \dot{+} (1-\alpha\mu) \cdot b$$

となる。そこで$\alpha\mu=\lambda$とおくとき、$\alpha > \lambda$となり、

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succ \lambda \cdot a \dot{+} (1-\lambda) \cdot b$$

が得られる。**（証終）**

定理22. 公理系Mから公理HM3は導出される。

（証明） 集合Aを

$$A = \{ \alpha \mid \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c \}$$

と定義しておこう。また、一般性を失うことなくa$\succsim$bと仮定しよう。

(1)　もし $a \succsim b \succsim c$ であるならば、定理20より全ての $\alpha \in [0,\ 1]$ に対して

$$\alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim b \succsim c$$

が成立する。したがって

$$A = \{ \alpha \mid \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c \}$$
$$= [0,\ 1]$$

は閉集合である。

(2)　もし $c \succsim a \succsim b$ であるならば、そのとき定理20より全ての $\alpha \in [0,\ 1]$ に対して

$$c \succsim a \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

すなわち

$$c \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \tag{A 4. 16}$$

である。したがって集合Aの制約式と式（A 4．16）の共通部分は

$$c \sim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \sim a \tag{A 4. 17}$$

となる。そのとき、もし $a \succ b$ であるならば、定理20より全ての $\alpha \in (0,\ 1)$ に対して

$$a \succ \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \tag{A 4. 18}$$

となる。しかしながら、式（A 4．18）は式（A 4．17）と矛盾する。したがって $a \sim b$ となる。それゆえに $c \sim a \sim b$ となる。

そのとき、

$$A = \{ \alpha \mid \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b \succsim c \} = [0,\ 1]$$

は閉集合である。

(3)　もし $c \succ a \succsim b$ であるならば、そのとき定理20より全ての $\alpha \in [0,\ 1]$ に対して

$$c \succ a \succsim \alpha \cdot a \dot{+} (1-\alpha) \cdot b$$

すなわち

$$c \succ \alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot b$$

となる。

したがって、連結性より

$$A = \{ \alpha \mid \alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot b \succsim c \}$$

は空集合である。空集合は閉集合である。

(4) いま、$a \succsim c \succsim b$としよう。

(i) もし$a \sim c \succsim b$であるならば、そのとき定理20より全ての$\alpha \in [0, 1]$に対して

$$c \sim a \succsim \alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot b$$

となる。集合Aの要素は1だけとなる。したがって集合Aは閉集合である。

(ii) もし$a \succsim b \sim c$であるならば、そのとき定理20より全ての$\alpha \in [0, 1]$に対して

$$\alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot b \succsim b \sim c$$

となる。したがって集合$A = [0, 1]$となり、それは閉集合である。

(iii) 最終として$a \succ c \succ b$と仮定しよう。もし$\alpha_1 \in A$、かつ、$\alpha_2 > \alpha_1$であるならば、そのとき定理21により$\alpha_2 \in A$となる。さて、公理M3より

$$c \sim \alpha^* \cdot a \dotplus (1-\alpha^*) \cdot b$$

なる$\alpha^* \in (0, 1)$が一意的に存在する。そのとき集合$A = [\alpha_*, 1]$なることを示そう。

もし$\alpha^* > \alpha$であるならば、そのとき定理21より

$$c \sim \alpha^* \cdot a \dotplus (1-\alpha^*) \cdot b \succ \alpha \cdot a \dotplus (1-\alpha) \cdot b$$

となり、$\alpha \notin A$である。また

$$1 \cdot a \dotplus 0 \cdot b = a \succ c$$

であるゆえに、$1 \in A$となる。したがって$A = [\alpha^*, 1]$は閉集合である。

集合Bの場合も同様に証明される。**(証終)**

(定理19の証明)

(1)　弱順序性に関しては公理M１と公理HM１はともに同じである。

(2)　公理M２において$\alpha=\frac{1}{2}$とおけば、公理HM２が生じる。

(3)　公理HM３は定理22によって導出された。　**（証終）**

付録５　効用関数の連続性と微分可能性

1. は じ め に

多くの文献で見受けられるところでは，選択対象の集合が全ての“くじ”，あるいは，全ての単純確率分布，あるいは，全ての離散的確率分布などであるとき，それぞれの集合に対応する効用関数の存在が期待効用定理において証明されている（本書，第８章，参照)。

そのような期待効用定理では，効用関数の**連続性**，**微分可能性**についてなにも言及されていない。しかるに，期待効用理論の応用においては連続な，あるいは，微分可能な効用関数の存在を示すことなしに，そのような関数が，しばしば，使われている。とくに，微分可能な効用関数に関する議論なしに，リスク回避関数の理論に入ることには理論的間隙がある。

効用関数の連続性あるいは微分可能性の問題は結果の集合Xと確率分布の集合P，両者の位相（topology）に関連して議論される。連続な効用関数についての文献はいくつかあるが（Arrow, 1970, Debreu, 1959, Foldes, 1972, Grandmont, 1970)，この付録では Foldes と Grandmont の定式化が参考にされた。

両者の内，Grandmont では集合Xは距離空間であり，集合Pには弱収束の位相が仮定されている。一方，Foldesでは集合Xは位相空間であり，集合Pは全ての単純確率分布からなる集合，全ての離散的確率分布からなる集合，全ての確率分布からなる集合に分けられている。位相空間Xが使われている関係からFoldes の議論は Grandmontのそれよりも数学的に複雑である。

ここでは，リスク回避関数への適応を念頭において結果の集合Xの要素は金額であると仮定しよう。したがって集合Xは実数直線Rである。さらに，大きい金額は小さい金額より選好されると仮定される。このような仮定のもとでは，次節で示されるように，連続な効用関数の存在に関する議論は上述の２人のそ

れに比べて非常に簡単である。3節における微分可能性の議論はFoldes (1972) のそれを再構成したものである。しかしながら，ここでは，期待効用の公理系がもたらす位相を出発点としているゆえに，期待効用の公理系と効用関数の連続性における連なりが上述の2人の議論より明確であろう。同様のことが微分可能性についても言われうる（伊藤，1985）。

さて，次節での議論の準備として，期待効用の公理系と線型効用定理から始めよう。

集合Pは実数の集合R上で定義された確率分布の集合としよう。そして，a, $b \in P$, $\alpha \in [0, 1]$ に対して$\alpha a+(1-\alpha)b$ は部分集合 $A(\subset R)$の確率が$\alpha a(A)+(1-\alpha)b(A)$ であるような確率分布である。また$\alpha a+(1-\alpha)b \in P$，すなわち，$P$は凸集合であるとしよう。さらに，前に述べたように，集合Rの要素は金額であるゆえに，x_1, $x_2 \in R$に対して$x_1 > x_2$であるならば $x_1 \succ x_2$と仮定しよう。

期待効用の公理系（第8章，5節，参照）

公理1（弱順序）：集合Pの要素に関する選好関係$\succsim$は弱順序である。

公理2（独立性）：全ての$a, b, c \in P$と全ての$\alpha \in (0, 1)$に対して，$a \succsim b$であるための必要充分条件は

$$\alpha a+(1-\alpha)c \succsim \alpha b+(1-\alpha)c$$

である。

公理3（アルキメディアン）：もし$a, b, c, \in P$に対して，$a \succ b \succ c$であるならば，そのとき

$$\alpha a+(1-\alpha)c \succ b$$

$$b \succ \beta a+(1-\beta)c$$

なる$\alpha, \beta \in (0, 1)$ が存在する。

このタイプの期待効用の公理系が選ばれた理由は次節の補題1において，すぐに，独立性の公理2，アルキメディアン公理3が使われるためである。第8章における他の公理系から独立性の公理，アルキメディアン公理は導出されるゆえに，我々の議論の出発点が独立性の公理，アルキメディアン公理を含む公理系である必然性はない（付録4，参照）。

集合Pが全ての単純確率分布からなる集合P_sであれ，全ての離散的確率分布からなる集合P_dであれ，連続な確率分布を含む全ての確率分布の集合P_0（$\supset P_d \supset P_s$）であれ，つぎの線型効用定理が証明されている。これは証明のプロセスから容易に理解される（付録1，参照）。

定理1（線型効用定理）．全ての$a, b \in P$に対して

$$a \succ b \Longleftrightarrow H(a) \geq H(b)$$

かつ

全ての$a, b \in P$と全ての$\alpha \in [0, 1]$に対して

$$H\{\alpha a+(1-\alpha)b\}=\alpha H(a)+(1-\alpha)H(b)$$

であるような関数Hが存在するための必要充分条件は公理1，2，3が成立することである。

いま，集合Pは単純確率分布の集合P_sであるとしよう。そして，線型効用関数Hに対して，$x \in R$を確率1で与える退化した確率分布a_xを使い，

$$h(x)=H(a_x)$$

とおくことによって，関数hを定義しよう。

そのとき

$$H(a)=\sum_x h(x)a(x), \quad a \in P_s$$

が得られる。

定理2（単純確率分布の期待効用定理）．定理1の関数Hは全ての$a \in P_s$に対して

$$H(a)=\sum_x h(x)a(x)$$

なる表現をもつ。

この関数hは効用関数と呼ばれており，しばしば見受けられるこの形式の期待効用定理では効用関数の連続性は言及されていない。次節以降，関数Hは関数$a \in P$の関数であるゆえに，数学の用語にしたがって（線型）**汎関数**（functional）と呼ぼう。また，**Stieltjes積分**の記号を使って

$$H(a) = \sum_x h(x)a(x)$$
$$= \int h(x)\,da(x)$$

と書くことにする。なお，ここでは，便宜上，線型効用関数と効用関数の記号は区別されている。

2. 連続性

汎関数Hの連続性を示すためにつぎの補題1を証明しよう。

補題1：集合Pは期待効用の公理系を満たし，$a \in P$を含む部分集合$P(a) \subset P$は

$$P(a) = \{b | a_1 \succ b \succ a_2,\ a_1,\ a_2 \in P\}$$

としよう。そのとき，集合$P(a)$はPにおいて開集合である。

(証明) 任意の$b \in P(a)$に対して，アルキメディアン公理3より

$$\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 \succ b \succ \beta a_1 + (1-\beta)a_2$$

なる$\alpha, \beta \in (0, 1)$が存在する。さらに，独立性の公理2より

$$a_1 \succ \alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 \succ \beta a_1 + (1-\beta)a_2 \succ a_2$$

となる。そして集合Pは凸集合であるから，

$$\alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 \in P$$
$$\beta a_1 + (1-\beta)a_2 \in P$$

となる。したがって，任意の$b \in P(a)$に対して$P(a) \supset P(b)$なる集合，

$$P(b) = \{c | \alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 \succ c \succ \beta a_1 + (1-\beta)a_2,$$

$c \in P(a), \alpha, \beta \in (0, 1)\}$

が存在する。これは集合$P(a)$が内点のみからなる集合であることを示している。それゆえに$P(a)$は開集合である。**(証終)**

註：補題1における集合$P(a)$は要素aの**近傍**と呼ばれる。任意の要素$a \in P$に対してつくられた近傍$P(a)$の全体は**近傍系**と呼ばれ，この近傍系が近傍公理（ハウスドルフの分離公理を含む）を満たすことは容易に確認される（証明，省略）。

集合P上で定義された汎関数Hが連続であることを示すには，Rの開集合R_1のHによる逆像$H^{-1}(R_1)$が集合Pの開集合になることを言えばよい（亀谷，1963, p.100)。

定理3.　定理1の汎関数Hは集合P上で連続である。

(証明)　ある$a_1, a_2 \in P$に対して，Rの開集合$\{x | H(a_1) > x > H(a_2), x \in R\}$の$H$による逆像は，$H$の順序保存在によって，集合$\{a | a_1 \succ a \succ a_2, a \in P\}$となる。補題1よりこの集合は$P$における開集合である。したがって汎関数$H$は$P$上で連続である。**(証終)**

この定理3によって期待効用の公理系から導出された汎関数Hは任意の凸集合P上で連続であることが判明する。つぎに，汎関数Hの連続性から**単純確率分布の集合**P_sにおける効用関数hがR上で連続であることを示そう。

定理4.　集合P_s上の汎関数Hが連続であるならば，そのとき

$$H(a) = \int h\,da, \quad p \in P_s$$

であり，関数hはR上で連続である。

(証明)　定理2は前提とされるゆえに，関数hがR上で連続であることだけを示す必要がある。

いま，$x \in R$に対して$\{x_n\}$, $(x_n \in R)$をxに収束する点列とし，それらに

対応する退化した確率分布を，それぞれ，a_x, a_{x_n}としよう。

汎関数HはP_s上で連続であるゆえに，$x_n \to x$であるとき

$$h(x_n) = H(a_{x_n}) \to H(a_x) = h(x)$$

となる。それゆえに，関数hは点xで連続である。点xはRの任意の点となしうるから，関数hはR上で連続である。（**証終**）

つぎに，**離散的確率分布の集合**P_dにおける効用関数hがR上で**有界**かつ連続であることを示そう。

定理 5. 集合P_d上の汎関数Hが連続であるならば，そのとき

$$H(a) = \int h\,da,\ a \in P_d$$

であり，関数hはR上で有界かつ連続である。

（証明） 離散的確率分布$a \in P_d$は，退化した確率分布$a_{x_i} \in P_d$によって

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{x_i},\ \alpha_i \in [0,\ 1],\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1,\ x_i \in R$$

と表現される。ただしα_iは分布aにおいてx_iが生じる確率である。いま

$$b_m = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i / \sum_{k=1}^{m} \alpha_k) a_{x_i},\ \alpha_1 > 0$$

としよう。そのとき，Hの線型性から

$$H(b_m) = (1/\sum_{k=1}^{m} \alpha_k)\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i H(a_{x_i})\}$$

となり，そして，Hの連続性から$b_m \to a$なるとき

$$H(a) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i H(a_{x_i}) = \int h\,da$$

となる。

さて，Hは有界でないと仮定し，$H(a_i) > 2^i$なる列$\{a_i\}$, $a_i \in P_d$をとりあげよう。そのとき，全てのmに対して

$$\sum_{i=1}^{m} (\frac{1}{2})^i H(a_i) > m$$

となる。したがって$a = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i a_i$なる確率分布に対して

$$H(a) = \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i H(a_i) \to \infty$$

となり，$H(a)$は存在せず，Hはaで連続でなくなる。それゆえに，Hは有

界である。したがって関数 h も有界である。同様に関数 h は下からも有界である。

また，$P_d \supset P_s$ であるゆえに，h の連続性に関しては定理4の証明の議論が適用され，関数 h は連続となる。**（証終）**

つぎに，連続な確率分布を含む全ての確率分布からなる集合 P_0（$\supset P_d \supset P_s$）における効用関数 h が R 上で有界かつ連続であることを示そう。そのために，つぎの補題2を証明しよう。

補題2：集合 P_s は集合 P_0 において稠密である。

（証明） 集合 P_0 の要素 a に対して，補題1で定義された集合 $P(a)$ と集合 P_0 の積 $P(a) \cap P_0$ が必ず P_s の要素を含むことを示せばよい（亀谷，1963, p.118）。

公理1，2，3は連続性の公理を意味している，すなわち，$b, b_1, b_2 \in P_0$ に対して $b_1 \succ b \succ b_2$ であれば

$$b \sim \alpha b_1 + (1-\alpha) b_2$$

なる $\alpha \in (0, 1)$ が一意的に存在する（付録4の議論において公理系 F が公理 $M3$ を意味していることに注目されたい）。いま，

$$P(a) = \{ b | a_1 \succ b \succ a_2,\ a_1,\ a_2 \in P_0 \}$$

に対して

$$b_1 \succ a_1 \succ b \succ a_2 \succ b_2$$

なる $b_1, b_2 \in P_s$ が存在すれば，連続性の公理により，ある $\alpha \in (0, 1)$ に対して

$$b \sim \alpha b_1 + (1-\alpha) b_2 \in P_s$$

かつ

$$\alpha b_1 + (1-\alpha) b_2 \in P(a)$$

となる。したがって，$P(a) \cap P_0$ は必ず P_s の要素 $\alpha b_1 + (1-\alpha) b_2$ を含む。

そのような b_1, b_2 を選ぶには，x_1 を充分に大きい正の金額，x_2 を充分に大きい負の金額とし，それぞれに，対応する退化した確率分布 a_{x_1}, a_{x_2} を使って，

$a_{x_1}=b_1$, $a_{x_2}=b_2$ とすればよい。 **(証終)**

定理6. 集合 P_0 （$\supset P_d \supset P_s$）上の汎関数Hが連続であるならば，そのとき

$$H(P)=\int h\,da, \quad a \in P_0$$

であり，関数 h は R 上で有界かつ連続である。

(証明) 汎関数Hは P_0 上で連続であり，$P_0 \supset P_d$ であるゆえに，HはP_d 上で連続となり，定理5より，

$$H(a)=\int h\,da, \quad a \in P_d$$

となり，関数 h は R 上で有界かつ連続な関数となる（P_dにおける H の連続性は P_dの相対位相による，亀谷，p.117）。

さらに，補題2から P_s は P_0 において稠密であり，かつ，$P_0 \supset P_s$ であるゆえに，任意の $a \in P_0$ に対して $a_n \to a$ なる列 $\{a_n\}$, $a_n \in P_s$を選ぶことが可能である。そのとき，汎関数Hの P_0 上での連続性から

$$H(a)=\lim_n H(a_n)=\lim_n \int h\,da_n=\int h\,da$$

となる。したがって，P_s における $H(a)=\int h\,da$, $a \in P_s$ は P_0 における$H(a)=\int h\,da$, $a \in P_0$ を成立させる（これは**等式的延長**と呼ばれている，ブルバキ，1964，訳書，p. 33)。 **(証終)**

3. 微分可能性

我々が考察している効用関数 h は金額の上で定義されており，金額の増大は効用の増大をもたらすと仮定された。したがって，前節で議論された連続な効用関数は単調増大関数である。一般的に言って，単調増大関数は“ほとんどいたるところで”有界な微係数をもつ（溝畑，1966，p.166)。それゆえに，一回微分可能性のみを問題とするとき，連続な効用関数 h は常に微分可能である。

しかしながら，我々はリスク回避関数で使われる効用関数の二回微分可能性に関心をもつ。そこで，効用関数の微分可能性について Foldes（1972）の定式化に沿って議論を展開しよう。ただし，数学的な道具の制約から，議論は有界

な効用関数の微分可能性に限定されている。

主題に入る前に予備的な議論から始めることにしよう。

さて，Sを確率分布の集合P_0に対応する分布関数の集合としよう。そして分布関数$F \in S$を使い，

$$F\{(x_1, x_2)\} = F(x_2) - F(x_1),\ (x_1, x_2) \subset R$$

を定義することによって，Fは確率測度ともみなされる。分布関数の集合Sは

$$V = V(S) = \{\mu \mid \mu = x_1 F_1 + x_2 F_2 ; F_1, F_2 \in S, x_1, x_2 \in R\}$$

であるようなベクトル空間Vを生成する。また，$V(S)$に$\|\mu\|_\infty = \mathrm{ess\ sup}\ |\mu(x)|$（すなわち，零集合を除いた点における上限）をノルムとして導入することによって，$V(S)$は**Banach空間**となる（Pearson, 1974, p.517）。

そして，S上での汎関数Hは，

$$\psi(x_1 F_1 + x_2 F_2) = x_1 H(F_1) + x_2 H(F_2),$$
$$F_1, F_2 \in S, x_1, x_2 \in R$$

とおくことによって，V上の線型汎関数ψに一意的に**拡張**される。また，逆に，V上の線型汎関数ψの**制限**はS上の汎関数Hである。もしhが$F \in S$に関してLebesgue-Stieltjes **積分可能**であるならば，すなわち，$\int hdF < \infty$，$F \in S$であるならば，hは$\mu \in V(S)$に関しても積分可能である。したがって，ψが$\int h\,d\mu$なる形をもつための必要充分条件はHが$\int h\,dF$なる形をもつことである。

いま，Nは確率密度$(2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$をもつ正規分布関数としよう。そのとき，全ての$F \in S$に対して$\int |F|\,dN$は有界である。そして$L_1(N)$は$R$上で$N$−積分可能な関数$f$からなる空間としよう，すなわち，全ての$f \in L_1(N)$に対して$\int fdN < \infty$である。さらに，$L_1(N)$にノルム$\|f\| = \int |f|dN$を導入すれば，$L_1(N)$は完備なベクトル空間，すなわち，Banach空間となる（Gikhman-Skorokhod, 1963, p.74）。したがって，集合SはこのBanach空間$L_1(N)$の部分集合とみなされる。

ノルム$\int |f| dN$の意味で，列$\{F_n\}$がFに収束するとき，この収束を**正規収束**と呼ぼう，すなわち，$F_n, F \in S$に対して

$$\int |F_n - F| dN \to 0$$

なるとき，$F_n \to F$は正規的に収束すると言われる。

さて，集合Sにノルム$\|F\| = \sup |F|$ を導入しよう。したがって，距離$d(F_1, F_2)$ は

$$d(F_1, F_2) = \sup |F_1 - F_2|$$

と定義される。この距離$d(F_1, F_2)$に対応するFの近傍を$P'(F)$ とし，補題1における選好関係$\succ$に対応するFの近傍を$P(F)$ としよう。そのとき，つぎの補題3が成立する。

補題 3 ：任意の近傍$P(F)$に対して

$$P(F) \supset P'(F)$$

なる近傍$P'(F)$が存在する。

（証明） いま，

$$P(F) = \{ c | F_1 \succ c \succ F_2 \}$$

としよう。そのとき，

$$A = \{ a | \text{ 全ての } c \in P(F) \text{ に対して } a \succ c \},$$

$$B = \{ b | \text{ 全ての } c \in P(F) \text{ に対して } c \succ b \}$$

なる集合A，Bが存在する。充分に大きい金額を確率1で与える退化した確率分布に対応する分布関数を考えるならば，そのとき集合Aが空でないことは明らかである。また，同様に集合Bも空でない。要素Fと集合Aの**距離**$d(F, A)$は

$$d(F, A) = \inf_{a \in A} d(F, a)$$

と定義される。同様に，

$$d(F, B) = \inf_{b \in B} d(F, b)$$

と定義される。そのとき，$d(F, A) \neq 0$，$d(F, B) \neq 0$ なることも明らかで

ある。そして

$$r=\min\{d(F, A), d(F, B)\}$$

としよう。この r を使うことによって

$$P'(F)=\{c|d(F, c)< r\}$$

なる近傍がつくられる。この近傍 $P'(F)$ は

$$P(F)\supset P'(F)$$

を成立させる。その理由は以下のとおりである。

全ての $c\in P'(F)$ に対して $c\notin P(F)$ であるならば，$c\in A$ かあるいは $c\in B$ でなければならない。しかしながら，これは $c\in P'(F)$ の定義と矛盾する。それゆえに，$c\in P(F)$ となり

$$P(F)\supset P'(F)$$

が得られる。**（証終）**

微分可能な効用関数の存在の問題に移ろう。

定理 7. 集合 S 上で定義された汎関数 H が連続であるならば，そのとき

$$H(F)=\int h\,dF,\quad F\in S$$

であり，関数 h は有界かつ連続であり“ほとんどいたるところで”定義された導関数をもつ。

（証明） 列 $\{F_n\}$ が近傍 $P(F)$ に関して F に収束するならば，そのとき，補題3によって $P(F)\supset P'(F)$ であるゆえに，列 $\{F_n\}$ は近傍 $P'(F)$ に関しても収束する。さらに，列 $\{F_n\}$ が $P'(F)$ に関して収束するならば，

$$\int|F_n-F|dN\leq\int\sup|F_n-F|dN\to 0$$

となる。したがって，列 $\{F_n\}$ は正規的に F に収束する。

このことから，集合 S 上で汎関数 H が $P(F)$ に関して連続ならば，H は正規収束に関しても連続となる（亀谷，1963，p.116）。そのとき，前節の議論と同様の論法で汎関数 H は $\int hdF$ なる形をもち，h は有界な連続関数となる。一方，$\mu\in V(S)$ は N に関して**絶対連続**である（すなわち，任意の $A\subset R$ に対して

$N(A)=0\rightarrow\mu(A)=0$）ので，Radon-Nikodym の定理によって

$$\mu(A)=\int_A f(x)\,dN,\ \frac{d\mu}{dN}=f,\ f\in L_1(N),\ \mu\in V(S)$$

なる**等長同型写像** $\mu\rightarrow f$ が定義される（Dunford-Schwartz, 1966, p.176)。

さて，集合 S 上で連続な汎関数 H に対して，ψ を $V(S)$ への H の拡張としよう。そのとき μ と f の一対一の対応関係から，$\mu\in V(S)$ に対して

$$\underline{\overline{\phi}}(f)=\psi(\mu)$$

なる等式が定義できる，ただし

$$f=\frac{d\mu}{dN},\quad f\in L_1(N)$$

である。したがって $\underline{\overline{\phi}}$ は $L_1(N)$ 上で連続となる。そのような汎関数 $\underline{\overline{\phi}}$ は

$$\underline{\overline{\phi}}(f)=\int fg\,dN,\quad f\in L_1(N),\quad g\in L_\infty(N)$$

なる形をもち，g は可測であり，一意的であり，有界である（Dunford-Schwartz, 1966, p.289)。

結果として，$L_1(N)$ 上での $\underline{\overline{\phi}}$ からの制限 H は

$$H(F)=\int h\,dF=\int F(x)\,g(x)\,dN(x),\quad F\in S$$

なる形をもつ。そこで，$z\in R$ でゼロから1へ変る分布関数 F_z を上式の F に代入すると

$$h(z)=\int_z^\infty g(x)\,dN(x)$$

が得られる。この $h(z)$ を微分するならば，

$$h'(z)=-g(z)N'(z)$$

は"ほとんどいたるところで"定義されている（積分記号のもとでの微分に関して Apostol, 1971, p.220, 参照)。**（証終）**

つぎに，関数 h の2回微分可能性を検討しよう。いま，任意の $F\in S$ に対して，積分分布関数 $\hat{F}$ を

$$\hat{F}(x)=\int_{-\infty}^{x} F(t)\,dN(t),\qquad x\in R$$

と定義しておこう。

定理 8. 集合S上で定義された汎関数Hが連続であるならば，そのとき

$$H(F)=\int h\,dF,\qquad F\in S$$

であり，関数hは有界かつ連続であり，“ほとんどいたるところで”定義された2次導関数をもつ。

(証明) 微分可能性だけを議論することにしよう。

もし$F_n, F\in S$に対して，$F_n\to F$が正規的に収束するならば，そのとき

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{F}_n-\hat{F}|dN(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{x}[F_n(t)-F(t)]\,dN(t)\right|dN(x)\\&\leqq\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F_n(t)-F(t)|dN(t)\,dN(x)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}|F_n-F|\,dN\end{aligned}$$

であるゆえに，$\hat{F}_n\to\hat{F}$も正規的に収束する。すなわち，$\hat{F}\in L_1(N)$である。したがって，集合S上の汎関数HがFの正規収束に関して連続であるならば，この汎関数Hは$\hat{F}$の正規収束に関しても連続である。一方，集合S上の汎関数Hが連続であるならば，汎関数HはFの正規収束に関して連続であった（定理7の証明，参照）。

さて，$\hat{F}$の定義はFと$\hat{F}$の間における一対一の線型演算であるゆえに,$H(F)=\hat{H}(\hat{F})$と表現することが可能である。ここで，$\hat{H}$を$L_1(N)$上の線型関数に拡張するならば，定理7と同様に

$$\int h\,dF=H(F)=\hat{H}(\hat{F})=\int\hat{F}G\,dN$$

が得られる。ただしGは可測であり，一意的であり，有界である。また，同様に，$z\in R$でゼロから1へ変る分布関数F_zを選び，$F=F_z$とおくならば

$$h(z)=\int_{z}^{\infty}[N(x)-N(z)]\,G(x)\,dN(x)$$

となる。この$h(z)$を微分するならば

$$h'(z)=-N'(z)\int_{z}^{\infty}G(x)\,dN(x)$$

が得られ，さらに微分するならば，

$$h''(z) = -N''(z)\int_{z}^{\infty} G(x)\ dN(x) + G(z)\{N'(z)\}^2$$

が得られる。これらの $h'(z)$, $h''(z)$ は“ほとんどいたるところで”定義されている。**(証終)**

なお，$(k+1)$ 回微分可能な効用関数の存在についても，

$$\hat{F}^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \hat{F}^{(k-1)}(t)\ dN(t),\quad x \in R$$

を定義することによって定理８と同様の議論がなされうる，ただし $\hat{F}^{(1)}(x) = \hat{F}(x)$ とする。

参 考 文 献

Allais, M.(1979), The So-Called Allais Paradox and Rational Decisions under Uncertainty, in Allais, M. and Hagen, O.(eds.), *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, Reidel.

Amihud, Y.(1979), Critical Examination of the New Foundation of Utility, in Allais, M. and Hagen, O.(eds.), *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, Reidel.

Apostol, T. M.(1971), *Mathematical Analysis*, Addison Wesley.

Arrow, K. J.(1963), Comment, *Review of Economics and Statistics*, Vol. XLV.

———— (1970), *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North Holland.

———— (1982), Risk Perception in Psychology and Economics, *Economic Inquiry*, 20, p.1-9.

Becker, G. M., DeGroot, M. H. and Marschak, J.(1963), Stochastic Models of Choice Behavior, *Behaviroral Science*, Vol. 8.

Bell, D. E.(1982), Regret in Decision Making Under Uncertainty, *Operations Research* Vol. 30. No. 5.

Bernoulli, D.(1738), Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk, in Page, A. N.(ed.), *Utility Theory*, 1968, Wiley.

Blackwell, D. and Girschick, M. A.(1954), *Theory of Games and Statistical Decisions*, Wiley.

Borch, K. (1968), *The Economics of Uncertainty*, Princeton University Press.
(福場　庸・田畑吉雄訳「不確定性の経済学」日本生産性本部, 1973.)

——— (1968, a), Introduction, in Borch, K. and Mossin, J.(eds.), *Risk and Uncertainty*, Macmillan.

——— (1974), *Mathematical Theory of Insurance*, Lexington.

ブルバキ (1964), 数学原論, 位相, 要約, 東京図書。

Colson, G. and Zeleny, M.(1980), *Uncertain Prospects Ranking and Portfolio Analysis under the Conditions of Partial Information*, Hain.

Debreu, G.(1959), Topological Methods in Cardinal Utility Theory, in Arrow, K. J., Karin, S. and Suppes, P.(eds.), *Mathematical Method in the Social Sciences*, Stanford University Press.

DeGroot, M. H.(1970), *Optimal Statistical Decisions*, McGraw.

Diamond, P. A. and Stiglitz, J. F.(1974), Increases in Risk and in Risk Aversion, *Journal of Economic Theory*, 8. p.337－360.

Dunford, N. and Schwartz, J. T. (1966), *Linear Operators, Part I*, Interscience.

Feller, W. (1950), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley.

Ferguson, T. S. (1967), *Mathematical Statistics*, Academic.

Finkbeiner, D. T. (1960), *Matrices and Linear Transformations*, Freeman.

Fishburn, P. C. (1967), Bounded Expected Utility, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 38, p.1054.

———— (1968), Utility Theory, *Management Science*, Vol. 14, No. 5.

———— (1970), *Utility Theory for Decision Making*, Krieger.

———— (1972), Personalistic Decision Theory ; Exposition and Critique, in Brinkers, H. S. (ed.), *Decision-Making Creativity, Judgement, and Systems*, Ohio State University Press.

———— (1979), On the Nature of Expected Utility, in Allais, M. and Hagen, O. (eds.), *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, Reidel.

———— (1982), *The Foundations of Expected Utility*, Reidel.

Foldes, L. (1972), Expected Utility and Continuity, *The Review of Economic Studies*, Vol. 39.

Friedman, M. and Savage, L. J. (1948), The Utility Analysis of Choices Involving Risk, *Journal of Political Economy*, Vol. 56, No. 4.

———— and ———— (1952), The Expected Utility Hypothesis and the Measurability of Utility, *Journal of Political Economy*. Vol. 60.

Fukuba, Y. and Ito, K. (1980), Risk Aversion and the Interdependence of Multiple Projects, *Unpublished*.

———— and ——— (1984), The So-Called Expected Utility Theory Is Inadequate, *Mathematical Social Sciences*, Vol. 7, No. 1.

福場　庸・伊藤駒之・田畑吉雄・坂上佳隆（1983），期待効用分析について，大阪大学経済学，第32巻，第２・３号

Fukuba, Y. and Miyamoto, M. (1981), Initial Wealth Problems from Descriptive and Normative Point of View, *Osaka Economic Papers*, Vol. 31, No. 2, .3.

Gikhman, I. I. and Skorokhod, A. V. (1963), *Introduction to the Theory of Random Processes*, Saunders.

Grandmont, J. M. (1970), Continuity Properties of a Von Neumann-Morgenstern Utility, *Journal of Economic Theory* 4.

Grether, D. M. and Plott, C. R. (1979), Economic Theory of Choice and the Pre-

ference Reversal Phenomenon, *American Economic Review*, 69.
Hershey, J. C., Kunreuther, H. and Schoemoker, P. J. H. (1982), Sources of Bias in Assessment Procedures for Utility Functions, *Management Science*, Vol. 28.
Herstein, I. N. and Milnor, J. (1953), An Axiomatic Approach to Measurable Utility, *Econometrica* Vol. 21.
Hildreth, C. (1974), Ventures, Bets and Initial Prospects, in Balch, M. S., McFadden, D. L. and Wu, S. Y. (eds.), *Essays on Economic Behavior under Uncertainty*, North Holland.
Holloway, C. A. (1979), *Decision Making under Uncertainty*, Prentice-Hall.
伊藤駒之(1980), 意思決定と不確実性に関する一考察, 国民経済雑誌, 第141巻, 第3号.
――――(1981), Arrow と Savageの公理系―期待効用定理―, 国民経済雑誌, 第144巻, 第2号.
――――(1981, a), リスク回避関数と単純な資産配分について, 国民経済雑誌, 第144巻, 第6号.
――――(1982), 期待効用の初期条件, 国民経済雑誌, 第146巻, 5号.
――――(1982, a), 期待効用の公理系について, 経済経営研究年報, 第32号(II).
――――(1983), Von Neumann-Morgenstern の公理系に関する注釈, 経済経営研究年報, 第33号(I・II).
――――(1984), 諸公理系の同値性(期待効用), 国民経済雑誌, 第149巻, 第2号.
――――(1984, a), 小世界と制約された合理性, 経済経営研究年報, 第34号(II).
――――(1985), 期待効用の連続性と微分可能性, 経済経営研究年報, 第35号(II).
――――(1986), 効用の測定とその困難性, 国民経済雑誌, 第153巻, 第4号.
Jensen, N. E. (1967), An Introduction to Bernoullian Utility Theory I, *Swedish Journal of Economics*, Vol. 69.
――――(1967, a), An Introduction to Bernoullian Utility Theory II, *Swedish Journal of Economics*, Vol. 69.
Kahneman, D. and Tversky, A. (1979), Prospect Theory : Analysis of Decision under Risk, *Econometrica*, Vol. 47.
亀谷俊司(1963), 集合と位相, 朝倉書店.
Keeney, R. L. and Raiffa, H. (1976), *Decisions with Multiple Objectives*, Wiley.
Kihlstrom, R. E., Romer, D. and Williams, S. (1981), Risk Aversion with Random Initial Wealth, *Econometrica*, 49.
―――― and Mirman, L. J. (1974), Risk Aversion with Many Commodities, *Journal of Economic Theory*, Vol. 18, No. 3.

Knight, F. H. (1921), *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin.
Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P. and Tversky, A. (1971), *Foundations of Measurement* Vol. I, Academic.
Lindley, D. V. (1971), *Making Decisions*, Wiley.
Luce, R. D. and Raiffa, H. (1957), *Games and Decisions*, Wiley.
Machina, M. J. (1982), "Expected Utility" Analysis without the Independence Axiom, *Econometrica*, Vol. 50, No. 2.
——— (1982, a), A Stronger Characterization of Declining Risk Aversion, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4.
Marschak, J. (1950), Rational Behavior, Uncertain Prospect and Measurable Utility, *Econometrica*, Vol. 18.
——— (1951), Why Should Statisticians and Businessmen Maximize Moral Expectation ? in *Economic Information, Decision and Prediction*, 1974, Reidel.
——— (1964), Actual Versus Consistent Decision Behavior, *Behavioral Science* 9.
Meyer, R. F. and Pratt, J. W. (1968), The Consistent Assessment and Fairing Preference Functions, *IEEE, System Science and Cybernetics*, SSC-4.
溝畑　茂(1966), ルベーグ積分. 岩波全書,
Morrison, D. G. (1967), On the Consistency of Preferences in Allais Paradox, *Behavioral Science*, Vol. 12.
小野二郎(1973), 企業評価論, 千倉書房.
Overton, W. (1983), The Memorandum Opinion of Judge William Overton: Part 3, *Computer and People*, Vol. 32, No. 3-4.
Paroush, J. (1975), Risk Premium With Many Commodities, *Journal of Economic Theory*, Vol. 11.
Pearson, C. E. (ed.)(1974), *Handbook of Applied Mathematics*, Reinhold.
Pfanzagl, J. (1959), A General Theory of Measurement: Application to Utility, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 6.
Pratt, J. W. (1964), Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica*, Vol. 32.
———, Raiffa, H. and Schlaifer, R. (1964), The Foundations of Decision under Uncertainty : An Elementary Exposition, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 59.
Raiffa, H. (1968), *Decision Analysis*, Addison-Wesley, (宮沢光一, 平館道子訳「決

定分析入門」, 東洋経済新報社, 1972.)

Ramsey, F. P. (1931), Truth and Probability in *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*, 1964, Harcourt, Brace and Co..

Roberts, F. S. (1979), *Measurment Theory*, Addison-Wesley.

Ross, S. A. (1981), Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and the Large with Applications, *Econometrica*, Vol. 49.

Samuelson, P. A. (1952), Probability, Utility and the Independence Axiom *Econometrica*, Vol. 20.

―――― (1966), Utility, Preference and Probability, in Stiglitz J. E. (ed.), *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson, Vol.* I, MIT Press.

Sandmo, A. (1969), Capital Risk, Consumption and Portfolio Choice, *Econometrica*, Vol. 37, No. 4.

Savage, L. J. (1954), *The Foundations of Statistics*, Wiley.

―――― (1971), Elicitation of Personal Probabilities and Expectations, *Journal of American Statistical Association*, Vol. 66, No. 336.

Schlaifer, R. (1969), *Analysis of Decisions under Uncertainty*, McGraw.

Schneeweiss, H. (1974), Probability and Utility-Dual Concepts in Decision Theory, in Menges, G. (ed.), *Information, Inference and Decision*, Reidel.

Schoemaker, P. J. H. (1980), *Experiments on Decisions under Risk*, Martinus.

―――― (1982), The Expected Utility Model : Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations, *Journal of Economic Literature*, Vol. XX.

Simon, H. (1982), *2 Models of Bounded Rationality*, Prentice-Hall.

7-11, The Role of Expectation in an Adaptive or Behavioristics Model (1958).

8-2, Theories of Bounded Rationality (1972).

Stiglitz, J. E. (1969), Behavior Towards Risk with Many Commodities, *Econometrica*, Vol. 37, No. 4.

Toda, M. and Shuford, E. H., Jr. (1965), Utility, Induced Utilities and Small Worlds, *Behavioral Science* 10.

Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

Williams, C. A. and Heins, R. M. (1976), *Risk Management and Insurance*, McGraw.

Yaari, M. E. (1969), Some Remarks on Measures of Risk Aversion and on Their Uses, *Journal of Economic Theory*, Vol. 1, No. 3.

横山 保(1960), 需要理論の研究, 有斐閣.

記 号 索 引

本書で広く使われ，特に注意を要すると考えられる記号の定義または説明がある頁数を示すために，この索引は作られた。

著 者 索 引

項 目 索 引

あ 行

か 行

さ　行

た　行

な　行

項目索引

は行

ま行

や行

ら行

わ行

期 待 効 用 理 論
—批 判 的 検 討—

昭和61年11月10日　印刷
昭和61年11月15日　発行
（非 売 品）

著　者　伊 藤 駒 之
神戸市灘区六甲台町
発 行 所　神戸大学経済経営研究所
天理市稲葉町 80 番地
印 刷 所　株式会社　天 理 時 報 社