神戸大学経済経営研究所
Research Institute for Economics and Business Administration, Kobe University

■コラム　RIEB ニュースレターNo.164　2016 年 7 月号

1968 年からの未解決問題

神戸大学　経済経営研究所
所長・教授　上東　貴志

こんな単純な問題が難しい筈はない。

今年の 2 月にトルコ人の共同研究者からその問題について聞いた時、私は正直そう思った。その問題とは、英国ケンブリッジ大学の Richard Weber 教授がオペレーションズ・リサーチの未解決問題として下記 URL においてリストの最初に挙げているものだった。

http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/research/unsolved.html

私は深く考えずに難しい筈はないと思ってしまったが、1968 年に登場して以来多くの数学者を苦しめてきた問題が簡単な訳がない。しかし、問題が単純であるが故に、一度考えだすと止められない。簡単そうで全く簡単ではない、非常に厄介な悪い問題だった。

幸いにも、私は頭以上に PC を使って、その難問をたまたま解決することができた。本コラムでは、問題の設定と解決するまでの過程を簡単に紹介したい。問題自体は純粋に数学的なものだが、原題と設定をそのまま和訳すると誤解を招きかねないので、ここでは問題を「秘密の部屋」ゲームと呼んで、ゲーム感覚で説明したい。

「秘密の部屋」ゲーム

1. あなたの目的はゴールに辿り着くことである。
2. ゴールに辿り着くには、あなたは秘密の部屋を 10 室通り抜けなければならない。
3. それぞれの部屋のドアを開けると、確率 R でゴーストが現れる。
4. スタート時点で、あなたは N 本の魔法の杖を持っている。
5. 魔法の杖を 1 本振ると、確率 P でゴーストを消すことができる。
6. スタート時点で、あなたは R、N、P の値を知っている。
7. それぞれの杖は 1 度振ると消えてしまう。
8. 杖は同時に何本でも振ることができる。（束にして振ることができる。）
9. 同時に複数の杖を振った場合でも、それぞれの杖がゴーストを消す確率は P である。（杖の効力は確率的に独立である。）
10. ドアを開けてゴーストが現れた場合、杖を振れるチャンスは一瞬だけで、そのチャンスを逃すとゲームセットとなる。（複数の杖を振る場合、束にして同時に振らなければならない。）
11. ゴーストが現れて、杖を 1 本も振らないか、あるいは杖が 1 本も残っていない場合は、ゲームセットとなる。

12. ドアを開けてもゴーストが現れないか、ゴーストが現れても杖を振って運良く消すことができれば、次の部屋（もしくはゴール）に進むことができる。

例えば、P = 0.1 とすると、いずれかの部屋でゴーストが現れた場合、杖を 1 本だけ振れば、ゴーストを消せる確率は 10%であり、杖を 10 本同時に振れば、ゴーストを消せる確率は約 65%である。目の前のゴーストを消すにはできるだけ多くの杖を振りたいところであるが、全ての杖を振ってしまうと、次の部屋以降で振る杖がなくなってしまう。ゴールに辿り着く確率を最大限大きくするには、残りの部屋数を考えて、杖を効率的に使う必要がある。

最も効率的な、すなわち最適な杖の使い方に関しては、いくつかの予想を立てられるが、以下はその中の 1 つである。

予想 B：　どの部屋でゴーストが現れた場合も、その時点での杖の数が多ければ多い程、振るべき杖の数は増えるか、少なくとも減ることはない。

（他に、予想 A と予想 C もあるが、かなり昔に解決済みであり、ここでは割愛する。）予想 B が正しければ、例えば、手持ちの杖が 5 本あって、ある部屋のドアを開けてゴーストが現れた時、5 本の内 3 本の杖を振るのが最適だったとすると、手持ちの杖が 6 本の場合には、振るべき杖の数は 3 以上になる。直感的には、手持ちの杖が多ければ、それだけ実際に振る杖も増えて当然である。ところが、これを数学的に証明しようとすると極端に難しいのである。

私自身も証明及び反証を試みたが、やはり難しかったので、まずは PC（研究用の計算マシーン）で予想 B を確認してみることにした。これには、今年 3 月に「アルファ碁」が韓国の囲碁棋士を破り、AI が注目を集めたことも少なからず影響している。私が書くプログラムは AI とは無縁だが、機械的に大量の計算を行うことにより、これまで分かり得なかったことが分かるのではないかという期待があった。

ところが、これも簡単ではなかった。普段は意識することは少ないが、PC の計算は通常は誤差を伴う。特に分数や少数の計算は、適当なところで近似してしまうので、どうしても誤差が生じてしまう。通常はそれでも誤差の範囲として問題にならないのだが、数学的な厳密さが要求される場合は、ほんの少し誤差が致命的になる場合がある。

特に「秘密の部屋」ゲームの場合、正しい計算をすれば図 1 のようなグラフが得られ、予測 B が正しいことが確認できるケースがあるのだが、通常の計算方法では図 2 のようなグラフになってしまい、予測 B は正しくないという反対の結果になってしまう。これでは折角計算をしても、誤解を生むだけである。

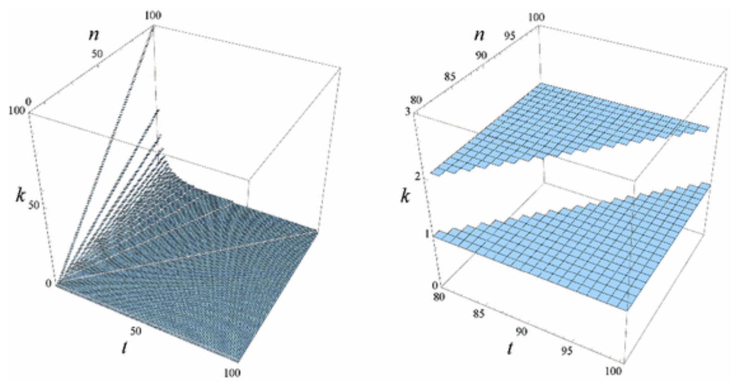

図 1　数値誤差のない計算結果

私は誤差のある計算からなかなか抜け出せず、方向性を見失いつつあったが、幸いにも、「秘密の部屋」ゲームは、整数の足し算、引き算、掛け算だけで答えが得られることに気付いた。つまり、全て筆算で正確に計算すれば、誤差のない結果が得られるのである。実際には筆算では埒が明かないので、PC で効率よく誤差のない整数計算をする方法（プログラムの書き方）を勉強した。

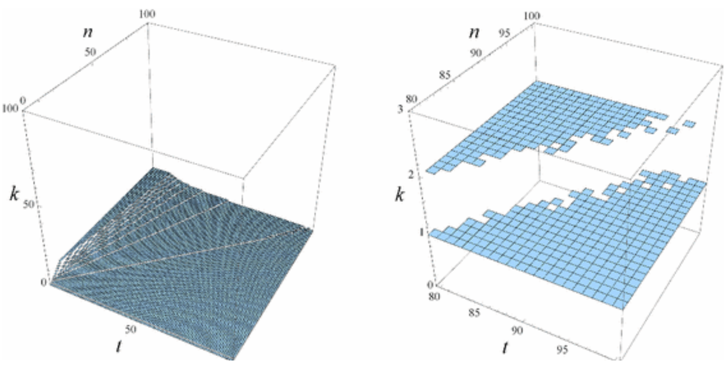

図 2　数値誤差のある計算結果

その方法を使って、確率 R と確率 P の両方を 0.01 刻みで 0.01 から 0.99 まで動かし、合計約 1 万組の計算を行った。その結果、全ての組み合わせにおいて予想 B が正しいことが分かった。その時点では予想 B は一般的に正しいのだろうと思ったが、念のために、さらに細かい計算をしてみることにした。今度は、確率 R と確率 P の両方を 0.001 刻みで 0.001 から 0.999 まで動かし、合計約 100 万組の計算をしたのである。

その計算が半分程済んだところで（計算を開始して 15 時間程で）、予想 B の例外、つまり、予想 B が正しくないケースが 1 つ見つかった。この時点では予想 B の例外が見つかるとは思っていなかったので、一度計算を止めてプログラムに間違いがないか確認した。さらに、例外が本当に正しいのかも確認した。その後、約 100 万組の計算を全て行ったところ、結局、41 の例外が見つかった。

間違いがあってはいけないので、全ての例外は、4 種類の異なる計算方法で正しいことを確認した。41 の例外と言っても 100 万の内の 41 なので、極めて稀であり、頭で考えて思いつくのは至難の業である。また、0.01 刻みの計算では常に正しいことに対して、0.001 刻みの計算では例外が見つかるとはなかなか想像できない。しかし、今回は実際にそうなったので、今後の教訓としても覚えておきたい。

上記の結果を纏めた論文は、「Annals of Operations Research」に既にオンライン版が掲載されている。

http://link.springer.com/article/10.1007/s10479-016-2265-6

Weber 教授からは非常に丁寧なメールをいただき、その中で、未解決問題を解決したことに対する祝福の言葉をいただいた。また、他にその論文を送るべき研究者も紹介していただき、その結果、多くの方から祝福の言葉をいただいた。普段は論文を書いても褒められることは滅多にないので、私の研究者人生の中でも初めての貴重な経験となった。

最後に蛇足ではあるが、私の計算の範囲では、予想 B の例外は、最低 31 本の杖がないと起こらない。5 番目の部屋のドアを開けてゴーストが現れた時、手持ちの杖が 30 本であれば 13 本の杖を振り、31 本であれば 12 本の杖を振るのが最適となるケースがある。このケースでは、杖が 1 本増えたにも関わらず、振る杖を敢えて 1 本少なくすることで、目の前のゴーストを消せる確率を 3%弱下げてしまうが、それ以上のベネフィットが、将来のゴーストに対して杖を温存することで得られるのである。