横断性条件の必要性と十分性*

上東貴志

神戸大学経済経営研究所

住所: 神戸市灘区六甲台町2-1
電話・Fax: 078-803-7015
Eメール: tkamihig@rieb.kobe-u.ac.jp

December 25, 2002

要約

本稿の目的は、離散時間と連続時間のそれぞれの場合において、オイラー方程式と横断性条件の必要性と十分性に関する重要な結果を大学院生レベルの読者に紹介することである。主な議論の対象は、特に問題となることの多い横断性条件の必要性である。本稿では、横断性条件の必要性を略式的に証明し、その問題点を指摘することにより、横断性条件の必要性が成立するための条件を説明する。また、横断性条件の必要性に対する反例も挙げる。さらに、離散時間のオイラー方程式と連続時間のそれの関係も明らかにする。離散時間の場合の結果に限ってはすべて証明する。

---

* 本稿は、西村和雄・福田真一編「非線形均衡動学：不決定性と複雑性」（東京大学出版）のために書かれたものである。非線形均衡動学研究会の参加者からの有益なコメントに感謝する。

1　はじめに

無限期間最適化問題は現代経済学における動学分析には必要不可欠である。無限期間最適化問題の解を求める際にはオイラー方程式と横断性条件が最適化条件として頻繁に使われるが、横断性条件に関しては既存の論文や教科書からでは正確かつ実用的な知識を得るのは難しいように思われる。理由としては、国際的な雑誌に掲載されているような論文でも横断性条件が不正確な使われ方をしている場合が多いこと、横断性条件を取り扱った論文は一般の読者には難解な物が多く正確に理解するのが難しいこと等が考えられる。本稿の主な目的は、横断性条件に関する正確かつ実用的な知識を大学院生レベルの読者に提供することである。

本稿は、オイラー方程式や横断性条件とはどういうものであるのか、またどのように使うのかをある程度理解している読者を対象としている。したがって、オイラー方程式や横断性条件の使い方は説明しない。では何を説明するのかと言うと、どのような条件の下でオイラー方程式や横断性条件が最適化の必要条件や十分条件になるのかである。オイラー方程式の必要性、およびオイラー方程式と横断性条件の十分性は広く知られていることなので、特に問題となるのは横断性条件の必要性である。

読者も遭遇したことが、あるいはこれから遭遇する機会があることと思うが、何の理由も挙げずに横断性条件の必要性を暗に仮定して議論を進める論文は非常に多い。もちろん、応用論文は数学的正当性を深く求めるものではないから、それはある程度仕方のないことである。仕方のないことではあるが、筆者は大学院生の頃からこの問題が気になっていた。文献を調べても答えが得られなかったので、横断性条件について時折考えるようになった。結果として、横断性条件に関する論文を何本か書くことができた次第である。

本稿では、筆者の最新の研究に基づいて、オイラー方程式と横断性条件に関する重要な結果を離散時間と連続時間の両方の場合で紹介する。これらの結果を理解していれば、横断性条件の必要性と十分性に関しては数理経済学者並の知識を得たといっても過言ではないだろう。とは言っても、対象はあくまで大学院生レベルの読者であるから、そのレベルの読者が読めば分かるように書いたつもりである。

離散時間か連続時間のどちらか一方の場合にしか興味がない読者もいると思

われるので、本稿はどちらから読んでも理解できるように構成されている。ただし、定理等の証明は離散時間の場合でのみしている。数学的には連続時間の場合の方が難しいので、どちらからでも構わないという読者には離散時間の場合の方を先に読むことを勧める。あらかじめ断わっておくが、どちらの場合でも定理等は本質的にまったく同じである。よって両方とも読むと同じことの繰り返しに感じられることと思うが、これは理由があってのことである。離散時間と連続時間の対比は本稿のテーマの１つであり、どちらの場合でも同じことが言えるということを示すこと自体が本稿の目的の１つだからである。離散時間と連続時間の対比を明確にするために、本稿では離散時間のオイラー方程式と連続時間のそれの比較をし、どちらも実は同じ形をしていることも説明する。

本稿の構成は次のとおりである。第2節では、離散時間におけるオイラー方程式と横断性条件の必要性と十分性に関する重要な結果を述べる。横断性条件の必要性を略式的に証明し、その問題点を指摘することにより、横断性条件の必要性が成立するための条件を説明する。また、横断性条件の必要性に対する反例も挙げる。第3節では、離散時間の場合の定理等を証明する。第4節では、連続時間におけるオイラー方程式と横断性条件の必要性と十分性に関する重要な結果を述べる。離散時間の場合と同様に、横断性条件の必要性を略式的に証明し、その問題点を指摘することにより、横断性条件の必要性が成立するための条件を説明する。また、横断性条件の必要性に対する反例も挙げる。第5節では、離散時間のオイラー方程式と連続時間のそれの関係を明らかにする。第6節では、横断性条件に関する重要な文献を簡単に紹介する。最後に第7節では、結びとしてコメントをいくつか加える。

2　離散時間の場合

2.1　モデルの設定

本節では次の最大化問題における最大化の必要条件と十分条件に関する重要な定理とそれに付随する結果を述べる。

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \displaystyle\max_{\{x_t\}_{t=0}^{\infty}} \quad \sum_{t=0}^{\infty} v_t(x_t, x_{t+1}) \\ \text{s.t.} \quad x_0 = \overline{x}_0, \quad (x_t, x_{t+1}) \in X_t. \end{cases}$$

この最大化問題は誘導形モデルと呼ばれるもので、離散時間における無限期間最

大化問題は一般的にこの形に表わすことができる。便宜上、v_tを利益関数、X_tを制約集合と呼ぶ。本節では次の2つを仮定する。

仮定2.1. すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して、$X_t \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$. ここで、$n \in \mathbb{N}$.[1]

仮定2.2. すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して、$v_t(y,z)$は$\mathring{X}_t$上で連続微分可能な(y,z)の関数である。ここで、$\mathring{X}_t$はX_tの内部である。

定義2.1. $x_0 = \overline{x}_0$を満たし、すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して$(x_t, x_{t+1}) \in X_t$となるような系列$\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$を**実行可能経路**と呼ぶ。最大化問題(2.1)の解となるような実行可能経路を**最適経路**と呼ぶ。

定義2.2. すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して$(x_t, x_{t+1}) \in \mathring{X}_t$となるような経路$\{x_t\}$を**内部的**と呼ぶ。

本稿では内部的最適経路のみを考察する。利益関数v_tの偏導関数を次のように表記する。

$$v_{t,1}(y,z) = \frac{\partial v_t(y,z)}{\partial y}, \tag{2.2}$$

$$v_{t,2}(y,z) = \frac{\partial v_t(y,z)}{\partial z}. \tag{2.3}$$

内部的実行可能経路$\{x_t^*\}$を所与とし、q_t^*を次のように定義する。

$$q_t^* = -v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*). \tag{2.4}$$

以下の式はそれぞれ、オイラー方程式、横断性条件と呼ばれる。

$$v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*) + v_{t+1,1}(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) = 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{T \to \infty} q_T^* x_{T+1}^* = 0. \tag{2.6}$$

2.2 オイラー方程式の必要性と横断性条件の役割

まず、オイラー方程式の必要性から考えてみよう。第2節では以下（第2.6項を除いて）次を仮定する。

仮定2.3. 内部的最適経路$\{x_t^*\}$が存在する。

[1] $\mathbb{Z} \equiv \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}, \mathbb{Z}_+ \equiv \{0,1,2,\dots\}, \mathbb{N} \equiv \{1,2,3,\dots\}$.

ここでは内部的最適経路が満たすべき必要条件だけを考えているので、内部的最適経路の存在を仮定することはモデルに制約を課すことにはならない。

オイラー方程式(2.5)は単にx_{t+1}に関する最適化の1階条件であるので、次の結果は明らかである。

定理2.1. 仮定2.1–2.3の下では、内部的最適経路$\{x_t^*\}$はオイラー方程式(2.5)を満たす。

1期間だけ最適経路から逸脱したような経路と最適経路を入れ替えても、目的関数を増大させることは当然出来ない。この最適化の必要条件からオイラー方程式は導かれる。

では、2期間だけ最適経路から逸脱したような経路と最適経路を入れ替えたとしたらどうだろうか？それでも目的関数を増大させることは当然出来ない。この条件からは、2期間分のオイラー方程式（例えば、１期と2期におけるオイラー方程式）が導かれる。同様に、n期間にわたって最適経路から逸脱したような経路と最適経路を入れ替えたとしても目的関数を増大させることは当然出来ない。ここからは、n期間分のオイラー方程式が導かれるだけである。つまり、最適経路から逸脱しても有限期間内に最適経路に戻ってくるような経路を考えることによって得られる最適化の1階条件はオイラー方程式だけなのである。

それでは、最適経路から逸脱して二度と戻って来ないような経路を考えてみた場合にはどのような条件が得られるのだろうか？実はこの条件こそが横断性条件なのである。特に(2.6)式の形の横断性条件は、最適経路全体を一定の割合で押し下げたような経路（条件(2.7)参照）を考えることによって得ることができる。もちろん、横断性条件を導く前にそのような経路が実行可能であることを仮定しなければならない。第2節では以下（第2.6項を除いて）次の２つを仮定する。

仮定2.4. ある$\tilde{\lambda} < 1$に対して、すべての$\lambda \in [\tilde{\lambda}, 1), t \in \mathbb{Z}_+$に対して、

$$(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*) \in X_t. \tag{2.7}$$

仮定2.5. すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して、

$$v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*) \leq 0. \tag{2.8}$$

仮定2.4は経済モデルにおいては標準的であるが、横断性条件を導く上で重要である。仮定2.5は、x_{t+1}を増やすためにはt期の利益を減らさなければならないことを意味する。この仮定も経済モデルにおいては標準的であるが、横断性条件を導く上ではあまり重要ではない。仮定2.5が成立しない場合には、横断性条件は等号ではなく不等号($\leq$)の条件になるだけである。

2.3 横断性条件の必要性の略式的証明

では早速、仮定2.4と2.5を使ってやや略式的に横断性条件(2.6)を導いてみよう。$\{x_t^*\}$の内部性と仮定2.4により、次の経路は$\lambda \leq 1$かつλが十分に1に近ければ実行可能である。

$$\{x_0^*, \lambda x_1^*, \lambda x_2^*, \lambda x_3^*, \ldots\}. \tag{2.9}$$

この経路で評価した目的関数の値を$U(\lambda)$とする。すなわち、

$$U(\lambda) = v_0(x_0^*, \lambda x_1^*) + \sum_{t=1}^{\infty} v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*). \tag{2.10}$$

$\lambda = 1$のとき$U(\lambda)$は目的関数の最大値になるから、$U(\lambda)$は$\lambda = 1$において非減少でなければならない。したがって、

$$U'(1) \geq 0 \tag{2.11}$$

となる。$U(\lambda)$を微分して$\lambda = 1$で評価すると、

$$U'(1) = v_{0,2}(x_0^*, x_1^*)x_1^* + \sum_{t=1}^{\infty}[v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^*] \tag{2.12}$$

となる。無限和の$t = 1$から$t = T$までの部分をばらすと、上式は以下のように書

き換えることができる。

$$U'(1) = v_{0,2}(x_0^*, x_1^*)x_1^* \tag{2.13}$$
$$+ v_{1,1}(x_1^*, x_2^*)x_1^* + v_{1,2}(x_1^*, x_2^*)x_2^*$$
$$+ v_{2,1}(x_2^*, x_3^*)x_2^* + v_{2,2}(x_2^*, x_3^*)x_3^*$$
$$\vdots$$
$$+ v_{T,1}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_T^* + v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1}^*$$
$$+ \sum_{t=T+1}^{\infty} [v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^*]$$
$$= [v_{0,2}(x_0, x_1^*) + v_{1,1}(x_1^*, x_2^*)]x_1^* \tag{2.14}$$
$$+ [v_{1,2}(x_1^*, x_2^*) + v_{2,1}(x_2^*, x_3^*)]x_2^*$$
$$\vdots$$
$$+ [v_{T-1,2}(x_{T-1}^*, x_T^*) + v_{T,1}(x_T^*, x_{T+1}^*)]x_T^*$$
$$+ v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1}^*$$
$$+ \sum_{t=T+1}^{\infty} [v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^*].$$

ここでオイラー方程式(2.5)とq_t^*の定義(2.4)を使うと次のようになる。

$$U'(1) = -q_T^* x_{T+1}^* + \sum_{t=T+1}^{\infty} [v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^*]. \tag{2.15}$$

左辺は条件(2.11)により非負であるから、

$$q_T^* x_{T+1}^* \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} [v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^*]. \tag{2.16}$$

左辺は仮定2.5により非負であるから、$T \to \infty$のときの極限をとると,

$$0 \leq \lim_{T\to\infty} q_T^* x_{T+1}^* \tag{2.17}$$
$$\leq \lim_{T\to\infty} \sum_{t=T+1}^{\infty} [v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^*] = 0 \tag{2.18}$$

となる。したがって、横断性条件(2.6)が成立する。

2.4　略式的証明の問題点と横断性条件の必要性に対する反例

上の略式的証明が100パーセント正しければ横断性条件は常に必要であると言い切れるのだが、残念ながら数学的に問題のある箇所がある。それは$U(\lambda)$が$\lambda = 1$に

おいて微分可能であり、導関数を$\lambda = 1$で評価すると(2.12)式の右辺になるとしているところである。(2.12)式が成立しないケースの方がどちらかと言うと特殊であるのだが、(2.12)式は無条件に成立する訳ではない。

単純な例を見てみよう。aとbを任意の正の定数として、利益関数v_t、制約集合X_t、および初期値$\overline{x}_0$が次のように与えられたとする。[2]

$$v_t(x_t, x_{t+1}) = -(x_t - a)^2 - b(x_{t+1} - x_t), \quad X_t = \mathbb{R}^2_+, \quad \overline{x}_0 = a. \tag{2.19}$$

この場合、オイラー方程式は

$$-b - 2(x^*_{t+1} - a) + b = 0 \tag{2.20}$$

となる。定理2.3により最適経路$\{x^*_t\}$はオイラー方程式を満たさなければならないから、すべての$t \in \mathbb{N}$に対して$x^*_t = a$となる。よって(2.10)と(2.19)より、

$$U(\lambda) = -b(\lambda - 1)a + \sum_{t=1}^{\infty}[-(\lambda - 1)^2 a^2]. \tag{2.21}$$

ゆえに、$U(1) = 0$であるが、$\lambda < 1$のときには$U(\lambda) = -\infty$となる。つまり、$U(\lambda)$は$\lambda = 1$において微分可能でないばかりか連続ですらない。したがって略式的証明の議論が成立せず、横断性条件も成立するとは限らない。実際にここでは

$$q^*_t x^*_{t+1} = ba > 0 \tag{2.22}$$

となるから、横断性条件(2.6)が成立しないことは明らかである。

2.5 横断性条件の必要性に関する定理と系

以上の議論により、横断性条件が常に必要条件になる訳ではないことが分かった。第2.3項の略式的証明の問題点は（左辺の存在も含めて）(2.12)式を仮定していることである。逆に言えば、(2.12)式さえ成立すれば、横断性条件の必要性を保証することができる。しかし、(2.12)式を直接立証するのは簡単ではないので、(2.12)式を保証するような比較的立証しやすい十分条件の方が望ましい。その

[2] 初期値$\overline{x}_0$は何でも構わないが、$\overline{x}_0 = a$の場合には$U(1)$が単純化される。以下の議論は任意の$\overline{x}_0$に対して成立する。

ような十分条件を述べるには以下の関数を定義しておくと便利である。

$$w_t(\lambda) = \frac{v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) - v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*)}{1-\lambda}, \tag{2.23}$$

$$\hat{w}_t(\underline{\lambda}) = \sup_{\lambda \in [\underline{\lambda}, 1)} w_t(\lambda), \tag{2.24}$$

$$w_t^* = \left.\frac{\partial v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=1}. \tag{2.25}$$

最後のw_t^*は(2.12)式の十分条件とは直接的には関係ないが、後で必要になるのでここでまとめて定義しておいた。図1は$w_t(\lambda), \hat{w}_t(\underline{\lambda}), w_t^*$の関係を表している。

定理2.2. 仮定2.1–2.5を仮定する。ある$\underline{\lambda} \in [\tilde{\lambda}, 1)$に対して次が成立すると仮定する。

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{w}_t(\underline{\lambda}) < \infty. \tag{2.26}$$

このとき、内部的最適経路$\{x_t^*\}$は横断性条件(2.6)を満たす。

上述のとおり、条件(2.26)は(2.12)式の十分条件である。[3]定理2.2を証明するにはこのことを証明するだけでいいのだが、条件(2.26)のもとでは第2.3項の証明よりも簡単に横断性条件の必要性を証明することができる。第3.1項では初歩的な議論だけで横断性条件の必要性を証明している。

図1から分かるように、利益関数が凹ならば、条件(2.26)は最適経路全体を比例的に押し下げたときに目的関数が$-\infty$にならないことを意味する。このようなケースは目的関数が常に有限ならば起こりえないので、定理2.2から次の結果を導くことができる。

系2.1. 仮定2.1–2.5を仮定する。すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して、制約集合X_tが凸集合であり、利益関数$v_t(y,z)$が(y,z)の凹関数であり、かつ次が成立すると仮定する。

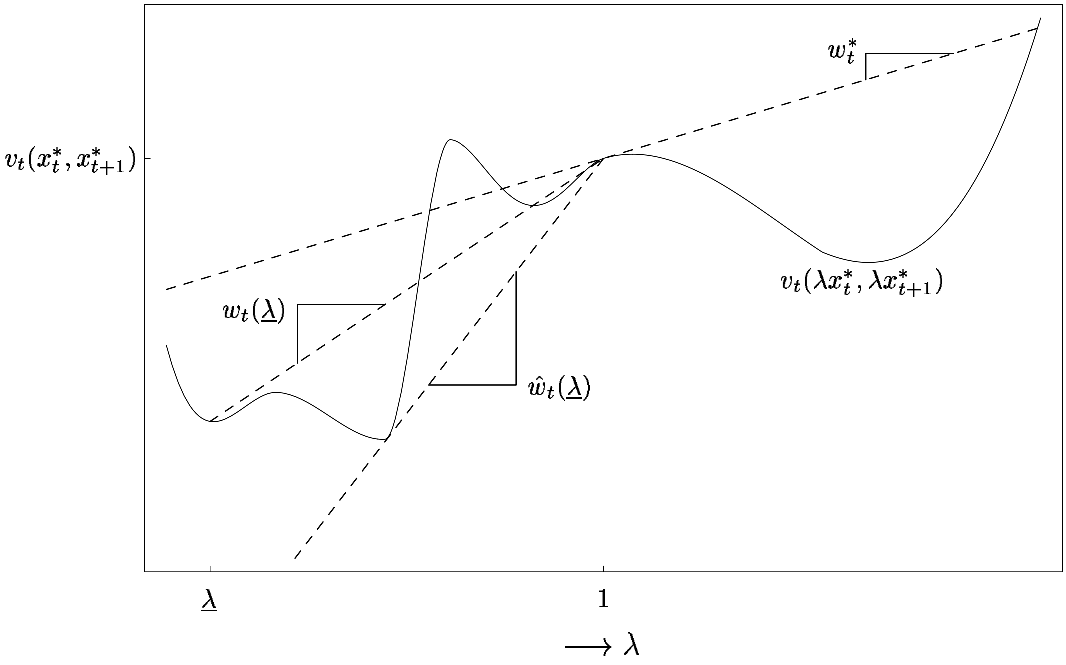
$$(0,0) \in X_t. \tag{2.27}$$

さらに、すべての実行可能経路$\{x_t\}$に対して次を仮定する。

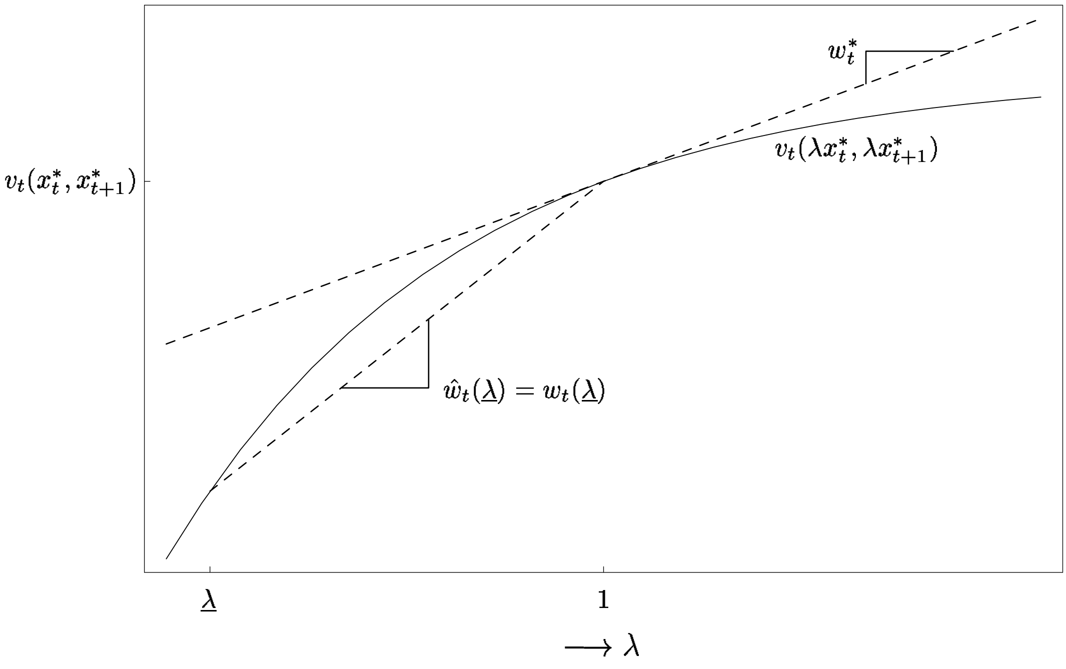
$$-\infty < \sum_{t=0}^{\infty} v_t(x_t, x_{t+1}) < \infty. \tag{2.28}$$

このとき、内部的最適経路$\{x_t^*\}$は横断性条件(2.6)を満たす。

[3]厳密には、(2.12)式の左辺はより一般的な微分の概念を使って定義する必要がある。



(a) 一般的な場合



(b) $v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*)$が$\lambda$の凹関数の場合

図 1: λの関数としての$v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*)$および$w_t(\underline{\lambda}), \hat{w}_t(\underline{\lambda}), w_t^*$との関係

$w_t(\underline{\lambda}), \hat{w}_t(\underline{\lambda}), w_t^*$はそれぞれに対応する点線の傾きである。

制約集合の凸性、利益関数の凹性、および条件(2.27)は標準的な仮定である。また、条件(2.28)は当然のこととして仮定されている場合が多い。したがって、多くの場合、横断性条件(2.6)の必要性は系2.1によって保証されている。

しかし、特に無界の効用関数を使ったモデルでは条件(2.28)が成立しないケースが多い。例えば、標準的なモデルにおいても$v_t(0,0) = -\infty$となることは多く、この場合、当然のことながら条件(2.28)は成立しない。

条件(2.28)が成立しないとき、あるいは条件(2.26)を立証するのが難しいときでも、横断性条件の必要性を保証できる場合がある。次の定理に進む前に、図1において$\hat{w}_t$とw_t^*の関係を再度確認されたい。

定理2.3. 仮定2.1–2.5を仮定する。ある$\underline{\lambda} < 1, \theta \geq 0$、すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して次が成立すると仮定する。

$$\hat{w}_t(\underline{\lambda}) \leq \theta w_t^*. \tag{2.29}$$

さらに、すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して次を仮定する。

$$w_t^* \geq 0. \tag{2.30}$$

このとき、内部的最適経路$\{x_t^*\}$は横断性条件(2.6)を満たす。

条件(2.30)は、x_t^*とx_{t+1}^*を同じ割合で減らしたときに利益関数が増加しなければ成立するので強い条件ではない。次の系では、条件(2.29)は利益関数がn次同次であれば成立することを明らかにしている。

系2.2. 仮定2.1–2.5を仮定する。すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して条件(2.30)を仮定する。さらに、ある$\beta \in \mathbb{R}$、すべての$t \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in [\tilde{\lambda}, 1)$に対して次が成立すると仮定する。

$$v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*) = \lambda^\beta v_t(x_t^*, x_{t+1}^*). \tag{2.31}$$

このとき、内部的最適経路$\{x_t^*\}$は横断性条件(2.6)を満たす。

2.6 オイラー方程式と横断性条件の十分性

利益関数が凹で制約集合が凸の場合には、オイラー方程式と横断性条件の十分性は以下の定理によって保証されている。

定理2.4. 仮定2.1、2.2、および2.5を仮定する。すべての$t \in \mathbb{Z}_+$に対して、制約集合X_tが凸集合であり、利益関数$v_t(y,z)$が(y,z)の凹関数であると仮定する。さらに、ある内部的実行可能経路$\{x_t^*\}$がオイラー方程式(2.5)と横断性条件(2.6)を満たすと仮定する。このとき、$\{x_t^*\}$は最適経路である。

定理2.4はよく知られている結果であり、横断性条件の必要性がはっきりしない場合にも使うことができる。例えば、制約集合が凹で利益関数が凸の場合には、オイラー方程式と横断性条件を満たす実行可能経路を見つけることさえできれば、定理2.4により、その経路が最適経路であると結論できる。さらに、利益関数が狭義凹ならば最適経路は一意的であるから、オイラー方程式と横断性条件を満たす実行可能経路が存在すれば、それが一意的な最適経路であると結論できる。

3 離散時間の場合の定理と系の証明

3.1 定理2.2の証明

$\underline{\lambda}$を仮定によりあたえられた定数とする。$T \in \mathbb{Z}_+, \lambda \in [\underline{\lambda}, 1)$とする。最適経路$\{x_t^*\}$の内部性と仮定2.4により、$\lambda$が十分に1に近ければ、次の経路は実行可能である。

$$\{x_0^*, x_1^*, \cdots, x_T^*, \lambda x_{T+1}^*, \lambda x_{T+2}^*, \cdots\}. \tag{3.1}$$

以下では、上の経路が実行可能である程λが1に近いとする。$\{x_t^*\}$は最適経路であるから、

$$v_T(x_T^*, \lambda x_{T+1}^*) - v_T(x_T^*, x_{T+1}^*) + \sum_{t=T+1}^{\infty} [v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*) - v_t(x_t^*, x_{t+1}^*)] \leq 0. \tag{3.2}$$

無限和を右辺に移し、並べ替えて両辺を$(1-\lambda)$で割ると次のようになる。

$$\frac{v_T(x_T^*, \lambda x_{T+1}^*) - v_T(x_T^*, x_{T+1}^*)}{1-\lambda} \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \frac{v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) - v_t(\lambda x_t^*, \lambda x_{t+1}^*)}{1-\lambda}. \tag{3.3}$$

上式と$\hat{w}_t(\underline{\lambda})$の定義(2.24)により、

$$\frac{v_T(x_T^*, \lambda x_{T+1}^*) - v_T(x_T^*, x_{T+1}^*)}{1-\lambda} \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \hat{w}_t(\underline{\lambda}). \tag{3.4}$$

$\lambda \to 1$のときの極限をとると次のようになる。

$$-v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1}^* \leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \hat{w}_t(\underline{\lambda}). \tag{3.5}$$

左辺は$q_T^* x_{T+1}^*$に等しく仮定2.5により非負であるから、

$$0 \leq \lim_{T\to\infty} q_T^* x_{T+1}^* \leq \lim_{T\to\infty} \sum_{t=T+1}^{\infty} \hat{w}_t(\underline{\lambda}) = 0. \tag{3.6}$$

したがって、横断性条件(2.6)が成立する。

3.2 系2.1の証明

$v_t(y,z)$は(y,z)の凹関数であるので、図1(b)から明らかなように、

$$\hat{w}_t(0) = w_t(0) = v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) - v_t(0,0). \tag{3.7}$$

したがって、

$$\sum_{t=0}^{\infty} \hat{w}_t(0) = \sum_{t=0}^{\infty}[v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) - v_t(0,0)] \tag{3.8}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) - \sum_{t=0}^{\infty} v_t(0,0) < \infty. \tag{3.9}$$

最後の不等号は条件(2.28)によって成立する。これにより条件(2.26)が成立するので、定理2.2により横断性条件(2.6)が成立する。

3.3 定理2.3の証明

$T \in \mathbb{N}$とする。(2.25)式より

$$w_t^* = v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^* \tag{3.10}$$

となるから、

$$\text{(3.11)} \qquad \sum_{t=0}^{T} w_t^* = \sum_{t=0}^{T}[v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_t^* + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)x_{t+1}^*]$$

$$\begin{aligned}
\text{(3.12)} \qquad &= v_{0,1}(x_0^*, x_1^*)x_0^* \\
&\quad + v_{0,2}(x_0^*, x_1^*)x_1^* + v_{1,1}(x_1^*, x_2^*)x_1^* \\
&\quad + v_{1,2}(x_1^*, x_2^*)x_2^* + v_{2,1}(x_2^*, x_3^*)x_2^* \\
&\quad\ \ \vdots \\
&\quad + v_{T-1,2}(x_{T-1}^*, x_T^*)x_T^* + v_{T,1}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1}^* \\
&\quad + v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1}^*
\end{aligned}$$

$$\text{(3.13)} \qquad = v_{0,1}(x_0^*, x_1^*)x_0^* + v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1}^*$$

$$\text{(3.14)} \qquad = v_{0,1}(x_0^*, x_1^*)x_0^* - q_T^* x_{T+1}^*.$$

(3.12)の等号は(3.11)の右辺の和をばらしただけである。(3.13)はオイラー方程式(2.5)によって成立する。最後に(3.14)はq_t^*の定義(2.4)を使っただけである。

(3.11)–(3.14)より、

$$\text{(3.15)} \qquad \sum_{t=0}^{\infty} w_t^* = v_{0,1}(x_0^*, x_1^*)x_0^* - \lim_{T\to\infty} q_T^* x_{T+1}^*.$$

上の極限が存在するのは、条件(2.30)により$\sum_{t=0}^{T} w_t^*$はTについて単調増加であるからである。

ここで、もし

$$\text{(3.16)} \qquad \lim_{T\to\infty} q_T^* x_{T+1}^* > 0$$

ならば、

$$\text{(3.17)} \qquad \sum_{t=0}^{\infty} w_t^* < v_{0,1}(x_0^*, x_1^*)x_0^* < \infty$$

となる。このことと条件(2.29)により条件(2.26)が成立する。よって、定理2.2により横断性条件(2.6)が成立する。

ところがこれは(3.16)と矛盾する。したがって(3.16)は成立しえない。つまり、$\lim_{T\to\infty} q_T^* x_{T+1}^* \le 0$でなければならない。左辺は仮定2.5により非負であるから、横断性条件(2.6)が成立する。

3.4　系2.2の証明

$\beta = 0$の場合には$\hat{w}_t(\underline{\lambda}) = 0$となるので、横断性条件(2.6)が成立することは定理2.2より明らかである。よって、以下では$\beta \neq 0$と仮定する。

(2.25)式、(2.31)式、および条件(2.30)により、

$$w_t^* = \beta v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) \geq 0. \tag{3.18}$$

(2.23)式と(2.31)式により、

$$w_t(\lambda) = \frac{1-\lambda^\beta}{1-\lambda} v_t(x_t^*, x_{t+1}^*). \tag{3.19}$$

ここで、$h(\lambda)$を次のように定義する。

$$h(\lambda) = \frac{1-\lambda^\beta}{(1-\lambda)\beta}. \tag{3.20}$$

$\underline{\lambda} \in (0,1)$とする。$\lambda \in [\underline{\lambda}, 1)$のときには$h(\lambda) > 0$であり、ロピタルの法則により$\lim_{\lambda \to 1} h(\lambda) = 1$であるから、$\theta = \sup_{\lambda \in [\underline{\lambda},1)} h(\lambda)$とおくと、$0 < \theta < \infty$となる。(2.24)式と(3.19)式、および$\theta$の定義と(3.18)式により、

$$\hat{w}_t(\underline{\lambda}) = \sup_{\lambda \in [\underline{\lambda},1)} \frac{1-\lambda^\beta}{(1-\lambda)\beta} \beta v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) \tag{3.21}$$

$$= \theta w_t^*. \tag{3.22}$$

したがって、定理2.3により、横断性条件(2.6)が成立する。

3.5　定理2.4の証明

オイラー方程式(2.5)と横断性条件(2.6)を満たすような内部的実行可能経路$\{x_t^*\}$が存在すると仮定する。この経路が最適であるためには、任意の実行可能経路$\{x_t\}$に対して次の不等式が成立することが必要かつ十分である。

$$\lim_{T \to \infty} \sum_{t=0}^{T} [v_t(x_t, x_{t+1}) - v_t(x_t^*, x_{t+1}^*)] \leq 0. \tag{3.23}$$

このことを示すために、$\{x_t\}$を任意の実行可能経路としよう。このとき、すべ

てのT ∈ $\mathbb{N}$に対して以下が成立する。（成立する理由は後で述べる。）

$$\sum_{t=0}^{T}[v_t(x_t, x_{t+1}) - v_t(x_t^*, x_{t+1}^*)] \tag{3.24}$$

$$\leq \sum_{t=0}^{T}[v_{t,1}(x_t^*, x_{t+1}^*)(x_t - x_t^*) + v_{t,2}(x_t^*, x_{t+1}^*)(x_{t+1} - x_{t+1}^*)] \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} &= v_{0,1}(x_0^*, x_1^*)(x_0 - x_0^*) \\ &\quad + v_{0,2}(x_0^*, x_1^*)(x_1 - x_1^*) + v_{1,1}(x_1^*, x_2^*)(x_1 - x_1^*) \\ &\quad + v_{1,2}(x_1^*, x_2^*)(x_2 - x_2^*) + v_{2,1}(x_2^*, x_3^*)(x_2 - x_2^*) \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\quad + v_{T-1,2}(x_{T-1}^*, x_T^*)(x_T - x_T^*) + v_{T,1}(x_T^*, x_{T+1}^*)(x_T - x_T^*) \\ &\quad + v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)(x_{T+1} - x_{T+1}^*) \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$= v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)(x_{T+1} - x_{T+1}^*) \tag{3.27}$$

$$\leq -v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1}^* \tag{3.28}$$

$$= q_T^* x_{T+1}^*. \tag{3.29}$$

(3.25)の不等号はv_tの凹性によって成立する。(3.26)の等号は(3.25)の和をばらしただけである。(3.27)の等号は、初期条件とオイラー方程式(2.5)によって成立する。(3.28)の不等号は、仮定2.1、2.5により$v_{T,2}(x_T^*, x_{T+1}^*)x_{T+1} \leq 0$であるから成立する。最後に、(3.29)の等号は$q_t^*$の定義(2.4)を使っているだけである。

(3.24)–(3.29)と横断性条件(2.6)によって、

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=0}^{T}[v_t(x_t, x_{t+1}) - v_t(x_t^*, x_{t+1}^*)] \leq \lim_{T\to\infty} q_T^* x_{T+1}^* = 0. \tag{3.30}$$

したがって、$\{x_t^*\}$は最適経路である。

4 連続時間の場合

4.1 モデルの設定

本節では次の最大化問題における最大化の必要条件と十分条件に関する重要な定理とそれに付随する結果を述べる。

$$\begin{cases} \max\limits_{x} & \displaystyle\int_0^\infty v(x(t), \dot{x}(t), t)dt \\ \text{s.t.} & x(0) = \overline{x}_0,\ (x(t), \dot{x}(t)) \in X(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

この最大化問題は誘導形モデルと呼ばれるもので、連続時間における無限期間最大化問題は一般的にこの形に表わすことができる。便宜上、vを利益関数、$X(t)$を制約集合と呼ぶ。

本節では正確を期すために多数の脚注を付したが、技術的な脚注は本節の内容を理解する上で重要ではないので、技術的な側面に興味のない読者は無視されたい。本節では次の2つを仮定する。

仮定4.1. すべての$t \geq 0$に対して、$X(t) \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n$. ここで、$n \in \mathbb{N}$.[4]

仮定4.2. すべての$t \geq 0$に対して、$v(y,z,t)$は$\overset{\circ}{X}(t)$上で連続微分可能な(y,z)の関数である。ここで、$\overset{\circ}{X}(t)$は$X(t)$の内部である。

定義4.1. $x(0) = \overline{x}(0)$を満たし、すべての$t \geq 0$に対して$(x(t), \dot{x}(t)) \in X(t)$となるような区分的連続微分可能な連続関数$x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$を**実行可能経路**と呼ぶ。[5] 最大化問題(4.1)の解となるような実行可能経路を**最適経路**と呼ぶ。

定義4.2. すべての$t \geq 0$に対して、$(x(t), \dot{x}(t)) \in \overset{\circ}{X}(t)$となるような実行可能経$x$を**内部的**と呼ぶ。[6]

仮定4.3. すべての内部的実行可能経路xに対して、$v(x(t), \dot{x}(t), t)$, $v_1(x(t), \dot{x}(t), t)$, $v_2(x(t), \dot{x}(t), t)$はそれぞれtの区分的連続関数である。

本稿では内部的最適経路のみを考察する。内部的実行可能経路x^*を所与と

---

[4] $\mathbb{R} \equiv (-\infty, \infty), \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty), \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \ldots\}$.

[5] 厳密には、$\dot{x}(t) = dx(t)/dt$という意味での$\dot{x}(t)$は$x(t)$がtにおいて微分可能でない場合には定義されていないので、本稿では$\dot{x}(t)$を次のように定義する。任意の区分的連続微分可能関数$x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$に対して、すべての$t \geq 0$において、$\dot{x}(t)$は次のように定義される。

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}, & x\text{が}t\text{において微分可能な場合}, \\ \lim\limits_{s \to t^+} \dfrac{dx(t)}{dt}, & x\text{が}t\text{において微分可能でない場合}. \end{cases} \tag{4.2}$$

[6] 内部的経路をこのように定義するのは本節の結果を証明する上で正確ではないが、応用する上では問題がないのでこのように定義した。問題がないと言うのは、正確な定義と定義4.2が同値とならないような応用問題はほとんど考えられないと言う意味である。正確な定義は次のとおりである。

すべての$t > 0$に対して、ある$\epsilon > 0$に対して、すべての$s \in (t - \epsilon, t + \epsilon)$に対して次の条件が成立するような実行可能経路$x$を**内部的**と呼ぶ。

$$|(y,z) - (x(s), \dot{x}(s))| < \epsilon \Longrightarrow (y,z) \in X(s). \tag{4.3}$$

ここで、$(y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$は任意であり、$|a|$はベクトル$a$の絶対値である。

し、$q^*(t), p^*(t)$を次のように定義する。

$$p^*(t) = v_1(x^*(t), \dot{x}^*(t), t), \tag{4.4}$$

$$q^*(t) = -v_2(x^*(t), \dot{x}^*(t), t). \tag{4.5}$$

以下の式はそれぞれ、オイラー方程式、横断性条件と呼ばれる。

$$\dot{q}^*(t) = -p^*(t), \tag{4.6}$$

$$\lim_{T\to\infty} q^*(T)x^*(T) = 0. \tag{4.7}$$

4.2 オイラー方程式の必要性と横断性条件の役割

まず、オイラー方程式の必要性から考えてみよう。第4節では以下（第4.6項を除いて）次を仮定する。

仮定4.4. 内部的最適経路x^*が存在する。[7]

ここでは内部的最適経路が満たすべき必要条件だけを考えているので、内部的最適経路の存在を仮定することはモデルに制約を課すことにはならない。

次の定理はオイラー方程式の必要性を明らかにしている。

定理4.1. 仮定4.1–4.4の下では、内部的最適経路x^*はオイラー方程式(4.6)を満たす。

非常に短い時間だけ最適経路から逸脱したような経路と最適経路を入れ替えても、目的関数を増大させることは当然出来ない。この最適化の必要条件からオイラー方程式は導かれる。

では、最適経路から逸脱してすぐに戻るのではなく、しばらく時間を経てから最適経路に戻ってくるような経路と最適経路を入れ替えたとしたらどうだろうか？それでも目的関数を増大させることは当然出来ない。この条件からは積分型

[7]正確には、本節の結果を証明するためにはここにさらなる仮定を加えておかなければならない。しかし、応用する上ではその仮定が成立しないケースはほとんど考えられないので本文では省略した。正確を期すために、仮定4.4は次の仮定も含まなければならないことを明言しておく。

すべての$t > 0$に対して、ある$\epsilon > 0, B > 0$に対して、すべての$s \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$に対して次が成立する。

$$|(y,z) - (x^*(s), \dot{x}^*(s))| < \epsilon \Longrightarrow (y,z) \in \overset{\circ}{X}(t),\ |v_1(y,z,s)|, |v_2(y,z,s)| \le B. \tag{4.8}$$

ここで、$(y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$は任意であり、$|a|$はベクトル$a$の絶対値である。

のオイラー方程式が導かれる。[8]つまり、最適経路から逸脱しても有限時間内に最適経路に戻ってくるような経路を考えることによって得られる最適化の1階条件はオイラー方程式だけなのである。

それでは、最適経路から逸脱して二度と戻って来ないような経路を考えてみた場合にはどのような条件が得られるのだろうか？実はこの条件こそが横断性条件なのである。特に(4.7)式の形の横断性条件は、最適経路全体を一定の割合で押し下げたような経路（条件(4.10)参照）を考えることによって得ることができる。もちろん、横断性条件を導く前にそのような経路が実行可能であることを仮定しなければならない。第4節では以下（第4.6項を除いて）次の２つを仮定する。

仮定4.5. ある$\tilde{\lambda} < 1$に対して、すべての$\lambda \in [\tilde{\lambda}, 1), t \geq 0$に対して、

$$(\lambda x^*(t), \lambda \dot{x}^*(t)) \in X(t). \tag{4.10}$$

仮定4.6. すべての$t \geq 0$に対して、

$$v_2(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \leq 0. \tag{4.11}$$

仮定4.5は経済モデルにおいては標準的であるが、横断性条件を導く上で重要である。仮定4.6は、$x(t)$を増やすためには時間tにおける利益を減らさなければならないことを意味する。この仮定も経済モデルにおいては標準的であるが、横断性条件を導く上ではあまり重要ではない。仮定4.6が成立しない場合には、横断性条件は等号ではなく不等号($\leq$)の条件になるだけである。

4.3 横断性条件の必要性の略式的証明

では早速、仮定4.5と4.6を使ってやや略式的に横断性条件(4.7)を導いてみよう。$\delta > 0$を所与として、$\tau(\lambda)$を次のように定義する。

$$\tau(\lambda) = -\frac{1}{\delta} \ln \lambda. \tag{4.12}$$

[8]正確には次の式である。

$$q^*(t+s) - q^*(t) = -\int_t^{t+s} p^*(t) dt. \tag{4.9}$$

ついでに言えば、上式の両辺をsで割って$s \to 0$のときの極限をとると微分型のオイラー方程式(4.6)が得られる。

このとき、$e^{-\delta\tau(\lambda)}=\lambda$となるから、$\delta$が十分に0に近く、$\lambda<1$で、かつ$\lambda$が十分に1に近ければ、$x^*$の内部性[9]と仮定4.5により次の経路は実行可能である。

$$x(t)=\begin{cases} e^{-\delta t}x^*(t), & 0\le t<\tau(\lambda), \\ x(t)=\lambda x^*(t), & t\ge\tau(\lambda). \end{cases} \tag{4.13}$$

この経路で評価した目的関数の値を$U(\lambda)$とする。すなわち、

$$\begin{aligned} U(\lambda)=&\int_0^{\tau(\lambda)} v(e^{-\delta t}x^*(t), e^{-\delta t}\dot{x}^*(t)-\delta e^{-\delta t}x^*(t), t)dt \\ &+\int_{\tau(\lambda)}^{\infty} v(\lambda x^*(t), \lambda\dot{x}^*(t), t)dt. \end{aligned} \tag{4.14}$$

$\lambda=1$のとき、$\tau(\lambda)=0$となり$U(\lambda)$は目的関数の最大値と等しくなるから、$U(\lambda)$は$\lambda=1$において非減少でなければならない。したがって、

$$U'(1)\ge 0 \tag{4.15}$$

となる。$U(\lambda)$を微分して$\lambda=1$で評価すると次のようになる。

$$\begin{aligned} U'(1)=&-\frac{1}{\delta}v(x^*(0),\dot{x}^*(0)-\delta x^*(0),0)+\frac{1}{\delta}v(x^*(0),\dot{x}^*(0),0) \\ &+\int_0^\infty [v_{t,1}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)x^*(t)+v_{t,2}(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\dot{x}^*(t)]dt \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} =&\frac{v(x^*(0),\dot{x}^*(0),0)-v(x(0),\dot{x}^*(0)-\delta x^*(0),0)}{\delta} \\ &+\int_0^\infty [p^*(t)x^*(t)-q^*(t)\dot{x}^*(t)]dt. \end{aligned} \tag{4.17}$$

ここで、(4.17)の等号は(4.4)式と(4.5)式によって成立する。上式は十分に小さい任意の$\delta>0$に対して成立するから、ロピタルの法則を使って$\delta\to 0$のときの極限をとり、(4.5)式を再度使うと次のようになる。

$$U'(1)=-q^*(0)x^*(0)+\int_0^\infty [p^*(t)x^*(t)-q^*(t)\dot{x}^*(t)]dt. \tag{4.18}$$

積の法則により$(\dot{\overline{q^*x^*}})=\dot{q}^*x^*+q^*\dot{x}^*$であるから、$-q^*\dot{x}^*=\dot{q}^*x^*+(\dot{\overline{q^*x^*}})$であ

[9] 正確には脚注6の意味での内部性である。

る。これを(4.18)式の積分の0からTまでの部分に代入すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
U'(1) &= -q^*(0)x^*(0) + \int_0^T [p^*(t)x^*(t) + \dot{q}^*(t)x^*(t) - (q^*(t)\dot{x}^*(t))]dt \\
&\quad + \int_T^\infty [p^*(t)x^*(t) - q^*(t)\dot{x}^*(t)]dt \\
&= -q^*(0)x^*(0) - q^*(T)x^*(T) + q^*(0)x^*(0) \\
&\quad + \int_T^\infty [p^*(t)x^*(t) - q^*(t)\dot{x}^*(t)]dt \\
&= -q^*(T)x^*(T) + \int_T^\infty [p^*(t)x^*(t) - q^*(t)\dot{x}^*(t)]dt.
\end{aligned}
$$

条件(4.15)により$U'(1) \geq 0$であるから、

$$
q^*(T)x^*(T) \leq \int_T^\infty [p^*(t)x^*(t) - q^*(t)\dot{x}^*(t)]dt. \tag{4.19}
$$

左辺は仮定4.6により非負であるから、$T \to \infty$のときの極限をとると次のようになる。

$$
0 \leq \lim_{T\to\infty} q^*(T)x^*(T) \leq \lim_{T\to\infty} \int_T^\infty [p^*(t)x^*(t) - q^*(t)\dot{x}^*(t)]dt = 0. \tag{4.20}
$$

したがって、横断性条件(4.7)が成立する。

4.4 略式的証明の問題点と横断性条件の必要性に対する反例

上の略式的証明が100パーセント正しければ横断性条件は常に必要であると言い切れるのだが、残念ながら数学的に問題のある箇所がある。それは$U(\lambda)$が$\lambda = 1$において微分可能であり、導関数を$\lambda = 1$で評価すると(4.18)式の右辺になるとしているところである。(4.18)式が成立しないケースの方がどちらかと言うと特殊であるのだが、(4.18)式は無条件に成立する訳ではない。

単純な例を見てみよう。aとbを任意の正の定数として、利益関数v、制約集合$X(t)$、および初期値$\overline{x}_0$が次のように与えられたとする。

$$
v(x(t), \dot{x}(t), t) = -(x(t) - a)^2 - b\dot{x}(t), \quad X(t) = \mathbb{R}^2_+, \quad \overline{x}_0 = a. \tag{4.21}
$$

この場合、

$$
p^*(t) = -2(x^*(t) - a), \quad q^*(t) = b \tag{4.22}
$$

となるから、オイラー方程式は

$$
0 = 2(x^*(t) - a) \tag{4.23}
$$

となる。定理4.1により最適経路x^*はオイラー方程式を満たさなければならないから、すべての$t>0$に対して$x^*(t)=a$となる。よって(4.14)と(4.21)より、

$$U(\lambda)=\int_0^{\tau(\lambda)}[-(e^{-\delta t}-1)^2a^2-b\delta e^{-\delta t}a]dt-\int_{\tau(\lambda)}^{\infty}(\lambda-1)^2a^2dt. \tag{4.24}$$

ゆえに、$U(1)=0$であるが、$\lambda<1$のときには$U(\lambda)=-\infty$となる。つまり、$U(\lambda)$は$\lambda=1$において微分可能でないばかりか連続ですらない。したがって略式的証明の議論が成立せず、横断性条件も成立するとは限らない。実際にここでは

$$q^*(t)x^*(t)=ba>0 \tag{4.25}$$

となるから、横断性条件(4.7)が成立しないことは明らかである。

4.5 横断性条件の必要性に関する定理と系

以上の議論により、横断性条件が常に必要条件になる訳ではないことが分かった。第4.3項の略式的証明の問題点は(左辺の存在も含めて)(4.18)式を仮定していることである。逆に言えば、(4.18)式さえ成立すれば、横断性条件の必要性を保証することができる。しかし、(4.18)式を直接立証するのは簡単ではないので、(4.18)式を保証するような比較的立証しやすい十分条件の方が望ましい。そのような十分条件を述べるには以下の関数を定義しておくと便利である。

$$w(\lambda,t)=\frac{v(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)-v(\lambda x^*(t),\lambda\dot{x}^*(t),t)}{1-\lambda}, \tag{4.26}$$

$$\hat{w}(\underline{\lambda},t)=\sup_{\lambda\in[\underline{\lambda},1)}w(\lambda,t), \tag{4.27}$$

$$w^*(t)=\left.\frac{\partial v(\lambda x^*(t),\lambda\dot{x}^*(t),t)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=1}. \tag{4.28}$$

最後の$w^*(t)$は(4.18)式の十分条件とは直接的には関係ないが、後で必要になるのでここでまとめて定義しておいた。図1を、$v_t(x_t^*,x_{t+1}^*)=v(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)$、$w_t(\lambda)=w(\lambda,t)$、$\hat{w}_t(\underline{\lambda})=\hat{w}(\underline{\lambda},t)$、$w_t^*=w^*(t)$と置き換えて参照されたい。

定理4.2. 仮定4.1–4.6を仮定する。ある$\underline{\lambda}\in[\tilde{\lambda},1)$に対して次が成立すると仮定する。

$$\int_0^\infty\hat{w}(\underline{\lambda},t)dt<\infty. \tag{4.29}$$

このとき、内部的最適経路x^*は横断性条件(4.7)を満たす。

上述のとおり、条件(4.29)は(4.18)式の十分条件である。[10]定理4.2を証明するにはこのことを証明するだけでいいのだが、条件(4.29)のもとでは第4.3項の証明よりも簡単な議論で横断性条件を証明することができる。Kamihigashi (2001, 定理3.2, 3.3) を参照されたい。[11]

図1（$v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) = v(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)$、$w_t(\lambda) = w(\lambda, t)$、$\hat{w}_t(\underline{\lambda}) = \hat{w}(\underline{\lambda}, t)$）から分かるように、利益関数が凹ならば、条件(4.29)は最適経路全体を比例的に押し下げたときに目的関数が$-\infty$にならないことを意味する。このようなケースは目的関数が常に有限ならば起こりえないので，定理4.2から次の結果を導くことができる。

系4.1. 仮定4.1–4.6を仮定する。すべての$t \geq 0$に対して、制約集合$X(t)$が凸集合であり、利益関数$v(y, z, t)$が(y, z)の凹関数であり、かつ次が成立すると仮定する。

$$(0, 0) \in X(t). \tag{4.30}$$

さらに、すべての実行可能経路xに対して次を仮定する。

$$-\infty < \int_0^\infty v(x(t), \dot{x}(t), t)dt < \infty. \tag{4.31}$$

このとき、内部的最適経路x^*は横断性条件(4.7)を満たす。

制約集合の凸性、利益関数の凹性、および条件(4.30)は標準的な仮定である。また、条件(4.31)は当然のこととして仮定されている場合が多い。したがって、多くの場合、横断性条件(4.7)の必要性は系4.1によって保証されている。

しかし、特に無界の効用関数を使ったモデルでは条件(4.31)が成立しないケースが多い。例えば、標準的なモデルにおいても$v(0, 0, t) = -\infty$となることは多く、この場合、当然のことながら条件(4.31)は成立しない。

条件(4.31)が成立しないとき、あるいは条件(4.29)を立証するのが難しいときでも、横断性条件の必要性を保証できる場合がある。次の定理に進む前に、図1を（$v_t(x_t^*, x_{t+1}^*) = v(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)$、$w_t(\lambda) = w(\lambda, t)$、$\hat{w}_t(\underline{\lambda}) = \hat{w}(\underline{\lambda}, t)$、$w_t^* = w^*(t)$と置き換えて）再度参照されたい。

[10]厳密には、(4.18)式の左辺はさらに一般的な微分の概念を使って定義する必要がある。

[11]しかしながら、同論文は難しいと感じる読者も多いと思われるので、第3.1項の離散時間の場合の証明を参照した上で、連続時間でも同じ議論が成り立つと言うことだけ理解されたい。

定理4.3. 仮定4.1–4.6を仮定する。ある$\lambda < 1, \theta \geq 0$に対して、すべての$t \geq 0$に対して次が成立すると仮定する。

$$\hat{w}(\underline{\lambda}, t) \leq \theta w^*(t). \tag{4.32}$$

さらに、すべての$t \geq 0$に対して次を仮定する。

$$w^*(t) \geq 0. \tag{4.33}$$

このとき、内部的最適経路x^*は横断性条件(4.7)を満たす。

条件(4.33)は、$x^*(t)$と$\dot{x}^*(t)$を同じ割合で減らしたときに利益関数が増加しなければ成立するので強い条件ではない。次の系では、条件(4.32)は利益関数がn次同次であれば成立することを明らかにしている。

系4.2. 仮定4.1–4.6を仮定する。すべての$t \geq 0$に対して条件(4.33)を仮定する。さらに、ある$\beta \in \mathbb{R}$に対して、すべての$t \geq 0, \lambda \in [\tilde{\lambda}, 1)$に対して次が成立すると仮定する。

$$v(\lambda x^*(t), \lambda \dot{x}^*(t), t) = \lambda^\beta v(x^*(t), \dot{x}^*(t), t). \tag{4.34}$$

このとき、内部的最適経路x^*は横断性条件(4.7)を満たす。

4.6 十分性

利益関数が凹、制約集合は凸の場合には、オイラー方程式と横断性条件の十分性は以下の定理によって保証されている。

定理4.4. 仮定4.1–4.3および4.6を仮定する。すべての$t \geq 0$に対して、制約集合$X(t)$が凸集合であり、利益関数$v(y, z, t)$が(y, z)の凹関数であると仮定する。さらに、ある内部的実行可能経路x^*がオイラー方程式(4.6)と横断性条件(4.7)を満たすと仮定する。このとき、x^*は最適経路である。

定理4.4はよく知られている結果であり、横断性条件の必要性がはっきりしない場合にも使うことができる。例えば、制約集合が凹で利益関数が凸の場合には、オイラー方程式と横断性条件を満たす実行可能経路を見つけることさえできれば、定理4.4により、その経路が最適経路であると結論できる。さらに、利益関数が狭義凹ならば最適経路は一意的であるから、オイラー方程式と横断性条件を満たす実行可能経路が存在すれば、それが一意的な最適経路であると結論できる。

5　離散時間と連続時間のオイラー方程式の比較

横断性条件は離散時間でも連続時間でも同じ形をしているが、オイラー方程式の方は離散時間と連続時間での関係が分かりにくい。離散時間と連続時間の対比は本稿のテーマの1つであるから、離散時間のオイラー方程式(2.5)と連続時間のオイラー方程式(4.6)は実は同じ形をしていることをここで簡単に説明しておく。

離散時間の場合、$\dot{x}(t)$に相当するのは$(x_{t+1}-x_t)$である。連続時間の利益関数は$v(x(t),\dot{x}(t),t)$であるから、離散時間の利益関数が連続時間のそれと同じ形であるならば、$V_t(x_t,x_{t+1}-x_t)$という形になるべきである。この形の利益関数は次のように定義できる。

(5.1) $$V_t(y,z)=v_t(y,y+z).$$

すなわち、

(5.2) $$V_t(x_t,x_{t+1}-x_t)=v_t(x_t,x_t+(x_{t+1}-x_t))=v_t(x_t,x_{t+1}).$$

連続時間の場合の$p^*(t)$と同様に（(4.4)参照）、離散時間でも

(5.3) $$p_t^*=V_{t,1}(x_t^*,x_{t+1}^*-x_t^*)$$

と定義すれば、(5.1)式より、

(5.4) $$p_t^*=v_{t,1}(x_t^*,x_{t+1}^*)+v_{t,2}(x_t^*,x_{t+1}^*)$$

となる。並べ替えて、q_t^*の定義(2.4)を使うと次のようになる。

(5.5) $$v_{t,1}(x_t^*,x_{t+1}^*)=p_t^*-v_{t,2}(x_t^*,x_{t+1}^*)=p_t^*+q_t^*.$$

同様に、

(5.6) $$v_{t+1,1}(x_{t+1}^*,x_{t+2}^*)=p_{t+1}^*+q_{t+1}^*.$$

上式と(2.4)式をオイラー方程式(2.5)に代入すると次のようになる。

(5.7) $$-q_t^*+p_{t+1}^*+q_{t+1}^*=0.$$

並べ替えると、

(5.8) $$q_{t+1}^*-q_t^*=-p_{t+1}^*$$

となる。左辺は連続時間の場合の$\dot{q}^*(t)$に相当するので、離散時間のオイラー方程式(2.5)は連続時間のオイラー方程式(4.6)と実は同じ形であることが分かる。

6　横断性条件に関する文献の紹介

オイラー方程式と横断性条件の十分性はMangasarian (1966) の定理として知られている。離散時間における横断性条件の必要性と十分性は、利益関数が凹で、すべての実行可能経路に対して目的関数が有限であるという条件の下で、Peleg (1970)、Peleg and Ryder (1972)、およびWeitzman (1973) によって証明されている。連続時間の場合では、Benveniste and Scheinkman (1982) およびAroujo and Scheinkman (1983) によって同様の結果が得られている。離散時間の場合に関しては、Michel (1990) が、目的関数が有限とは限らない場合にも適用できる一般的な横断性条件の必要性と十分性を証明している。連続時間における横断性条件の十分性に関しては、Seierstad and Sydsæter (1977) が類似の結果を得ている。

Michel (1982) は、最大値原理（Pontryagin, et. al. 1964）に基づいて連続時間における次の形の横断性条件の必要性を証明している。

$$\lim_{t\to\infty} q^*(t) = 0. \tag{6.1}$$

基本的には、上の横断性条件は、最適経路全体を一定の値で押し下げたような経路を考えることによって導くことができる。それに対して、本稿で考察した横断性条件は、最適経路を一定の割合で押し下げたような経路を考えることによって導くことができる。これらの横断性条件の関係に関しては、Kamihigashi (2001) を参照されたい。

Ekeland and Scheinkman (1984) は利益関数が無界でも適用可能な、離散時間における横断性条件の必要性に関する結果を証明している。彼らの証明は難解であるが、Kamihigashi (2000) はさらに一般的な結果を比較的単純に証明している。

横断性条件の必要性に関する文献については、Kamihigashi (2001) で統括的に議論しているので参照されたい。また同論文では、連続時間における横断性条件の必要性に関する現時点で最も一般的な結果が証明されている。Kamihigashi (2002b) では、離散時間における確率的な問題にまでKamihigashi (2001) の結果を拡張している。

本稿の必要性に関する定理と議論はKamihigashi (2001,2002b) に基づいている。ただし、第3.1項の定理2.2の証明は基本的にKamihigashi (2002a) からの借

用である。その他の証明はKamihigashi（2001）の証明を離散時間で書き直し単純化したものである。また、第2.3項と第4.3項の略式的証明は本稿のために書かれたものである。

7 おわりに

本稿では、離散時間と連続時間のそれぞれの場合において、オイラー方程式と横断性条件の必要性と十分性に関する重要な結果を紹介した。離散時間の結果に限ってはすべて証明した。また、離散時間のオイラー方程式と連続時間のそれは実は同じ形をしている点も説明した。

本稿では脚注等を使ってできるだけ正確を期したが、1つだけ暗に仮定していたことがある。それは、目的関数がすべての実行可能経路に対して定義されているという仮定である。この仮定は当然のこととして議論すらされない場合が多い。しかし、理論的研究においては、そのような仮定を明確にするか、あるいは目的関数がすべての実行可能経路に対して必ずしも定義されていない場合にはどのような最適化の基準を使うかを明確にしておく必要がある。この点に関しては、Kamihigashi (2001) 等の参考文献を参照されたい。

オイラー方程式の必要性およびオイラー方程式と横断性条件の十分性は広く知られていることなので、特に問題となるのは横断性条件の必要性である。本稿では横断性条件の必要性を保証する十分条件を主に2種類挙げた。大まかに言うと次のとおりである。

（１）最適経路全体を比例的に押し下げたときに目的関数が$-\infty$にならない。

（２）利益関数がn次同次であるか、またはそれに準じる性質を持つ。

どちらかの条件が満たされれば横断性条件の必要性は保証されるのだが、どちらの条件も満たされないケースも少なくない。そのような場合には、本稿の結果からだけでは横断性条件の必要性は残念ながらはっきりしない。Kamihigashi (2001) では上記の条件以外の条件も提示されているが、本稿の横断性条件の必要性に対する反例からも分かるように、横断性条件は常に必要条件になる訳ではないのである。しかし、応用研究においては横断性条件の必要性を問う前にある程度最適経路の性質が分かっていることが多いので、その性質を使って横断性条件の必要性を明らかにすることができるケースもある。とは言うものの、横断性条

件の必要性がはっきりしない場合に関しては、まだまだ研究の余地があると言わざるを得ない。

参考文献

Araujo, A., and J.A. Scheinkman, 1983, "Maximum Principle and Transversality Condition for Concave Infinite Horizon Economic Models," *Journal of Economic Theory* 30, 1–16.

Benveniste, L.M., and J.A. Scheinkman, 1982, "Duality Theory for Dynamic Optimization Models of Economics: The Continuous Time Case," *Journal of Economic Theory* 27, 1–19.

Ekeland, I., and J.A. Scheinkman, 1986, "Transversality Conditions for Some Infinite Horizon Discrete Time Optimization Problems," *Mathematics of Operations Research* 11, 216–229.

Kamihigashi, T., 2000, "A Simple Proof of Ekeland and Scheinkman's Result on the Necessity of a Transversality Condition," *Economic Theory* 15, 463–468.

Kamihigashi, T., 2001, "Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems," *Econometrica* 69(4), 995–1012.

Kamihigashi, T., 2002a, "A Simple Proof of the Necessity of the Transversality Condition," *Economic Theory* 20, 427–433.

Kamihigashi, T., 2002b, "Necessity of Transversality Conditions for Stochastic Problems," *Journal of Economic Theory,* forthcoming.

Mangasarian, O.L., 1966, "Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems," *SIAM Journal of Control,* 4, 139–52.

Michel, P., 1982, "On the Transversality Condition in Infinite-Horizon Problems," *Econometrica* 50, 975–985.

Michel, P., 1990, "Some Clarifications on the Transversality Condition," *Econometrica* 58, 705–723.

Pontryagin, L.S., V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko, 1964, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, translated by D.E. Brown. New York: Macmillan.

Peleg, B., 1970, "Efficiency Prices for Optimal Consumption Plans III," *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 32, 630–638.

Peleg, B., and H.E. Ryder, Jr., 1972, "On Optimal Consumption Plans in a Multi-sector Economy," *Review of Economic Studies* 39, 159–169.

Seierstad, A., and K. Sydsæter, 1977, "Sufficient Conditions in Optimal Control Theory," *International Economic Review* 18, 367–391.

Weitzman, M.L., 1973, "Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models," *Management Science* 19, 783–789.